ZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine

ONALE
Prov.
VITT. EM. III
POLI

B. Rec.
I
1940

TRAITÉ
ÉLÉMENTAIRE
DE
L'ANALYSE MATHÉMATIQUE.

On trouve chez le même Libraire, les Ouvrages suivans, du citoyen COUSIN.

1°. Traité du Calcul différentiel et intégral, 2 vol. in-4., six planches. 21 liv. pour Paris.

2°. Introduction à l'Astronomie Physique, in-4.

3°. Essai de Physique, 1 vol

Les Ouvrages qui doivent servir d'introduction aux deux premiers, paroîtront successivement.

Voyez, pour les autres Livres, le Catalogue qui est à la fin de l'Ouvrage.

608139

TRAITÉ

ÉLÉMENTAIRE

DE

L'ANALYSE MATHÉMATIQUE,

PAR J. A. J. COUSIN,

Membre de l'Institut National, et Professeur au Collége de France.

---

4 liv. [illegible]s. pour Paris, 5 liv. [illegible]s. fr. de port.

A PARIS,

Chez BERNARD, Libraire pour les Mathématiques, Sciences et Arts, quai des Augustins, n°. 37.

AN VI DE LA RÉPUBLIQUE. — 1797 (V. st.).

AVERTISSEMENT.

CE n'est point un Traité d'Algèbre que je présente au public, mais des Élémens de cette science pour ceux qui ont les premières notions d'Arithmétique. Je n'ai pu ignorer, en les rédigeant, que le principal mérite de ces ouvrages est la précision et la clarté; qu'il n'est possible d'atteindre ce but qu'en suivant la méthode analytique, qu'en enchaînant les différentes questions qu'on traite, de manière qu'elles dérivent les unes des autres sans contrainte. Clairaut a suivi cette méthode dans une partie de ses Élémens d'Algèbre. Cet ouvrage est toujours lu avec enthousiasme, quoique depuis il en ait paru d'autres beaucoup plus complets. Celui que je publie renferme ce qu'il est nécessaire de savoir d'Algèbre pour entendre mon Traité du

*

Calcul différentiel et du Calcul intégral, que le public a bien voulu accueillir favorablement.

TABLE SOMMAIRE.

PREMIÈRE PARTIE.

DÉFINITION de l'analyse ; l'Algèbre est la langue de l'analyse Mathématique.

De la manière de mettre les Problêmes en Equations. Nos. 1

Comment on traduit les Equations en langage algébrique. 3

Au moyen des signes qui composent cette langue, on parvient, sur chaque objet, aux résultats les plus généraux qu'on appelle des Théorêmes. 8

Des premières règles de l'Algèbre. 10

Principes fondamentaux de la théorie des Fractions. 13

Des Fractions décimales. 17

De l'élévation aux Puissances et de l'extraction des Racines. 21

Des Signes radicaux. 25

Des Proportions arithmétiques et géométriques. 27

Premier Exemple d'une Règle de trois. 32

Second Exemple. 34

Remarque importante sur la nature des Proportions et des Equations. 35

Des changemens d'ordre dont les termes d'une Proportion géométrique sont susceptibles. 36

Des Progressions géométriques. 40

Des Progressions arithmétiques. 43

Des Logarithmes. 45

Trouver le nombre des termes d'une Progression géométrique dont on connoît le premier terme, la raison et la somme de tous les termes. 48

Trouver le nombre des termes d'une Progression arithmétique dont on connoît le premier terme, la différence et la somme. 49

Ce Problême conduit à une Equation, où l'inconnue est élevée à la seconde puissance ; résolution des Equations du second degré ; ce qu'on doit entendre par Racines réelles et imaginaires d'une Equation. 50

Des Règles de compagnie. 55

Des Calculs d'intérêts. 56

Problême qui nous conduit à demander ce que signifie une expression qui a pour dénominateur zéro ; ce que signifie zéro lui-même. 59

Autre Problême, duquel il résulte que les usages des signes + et — ne se bornent point à indiquer l'Addition et la Soustraction, mais encore les valeurs d'une même quantité dans des sens différens. 62

SECONDE PARTIE.

On s'est plus attaché, dans la première partie, à développer les principes, qu'à exercer dans le calcul: on s'occupera dans celle-ci de ce second objet.

De l'Addition et de la Soustraction des quantités littérales. 65

De la Multiplication et de la Division. 67

Des Fractions : réduire une Fraction à ses moindres termes, en cherchant le plus grand commun diviseur du numérateur et du dénominateur. 69

Des Fractions continues. 71

Développer en Fraction continue la Fraction décimale, qui est le rapport approché de la demi-circonférence du cercle au rayon. 75

De la manière de développer les Fractions en Séries. 76

De la manière de résoudre en Fractions binomes toute Fraction rationelle. 85

Des Séries récurrentes. 89

Propriétés des Nombres ordinaux. 93

Usage qu'on en peut faire pour élever un Binome aux puissances dont les exposans sont des nombres entiers négatifs. 95

Des Combinaisons. 97

Usage qu'on en peut faire pour élever un Binome aux puissances dont les exposans sont des nombres entiers positifs. 99

Digression sur l'extraction des Racines des quantités numériques. 100

De l'élévation aux Puissances, quels que soient les exposans de ces Puissances. 106

De l'extraction des Racines des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables. 110

Ce Problême est nécessairement lié à celui de résoudre une Equation quelconque; remarque sur les Equations du troisième degré. 112

TROISIÈME PARTIE.

De la résolution des Équations déterminées.

Notions générales sur la nature des Equations. 114

Des Diviseurs commensurables des Equations. 117

Des Racines égales des Equations. 121

Autre méthode pour déterminer les Racines égales des Equations. 127

De la manière de simplifier une Equation en en faisant disparoître des termes. 129

Pour résoudre par ce moyen les Equations du troisième degré, il faut en faire disparoître deux termes. 131

Il faudroit en faire disparoître trois, si l'Équation étoit du quatrième degré; mais cette méthode étant moins simple que celle dont on fait usage ordinairement, on ne s'y arrête pas pour s'occuper de celle-là.

Résolution des Équations du troisième degré. 132

Usage des Séries pour démontrer que dans le cas irréductible les trois Racines sont réelles. 135

Méthode d'approximation pour résoudre les Equations du troisième degré. 138

Résolution des Equations du quatrième degré. 141

Des Equations des degrés supérieurs. 148

Nous croyons nécessaire d'ajouter quelques remarques à ce que nous avons dit plus haut des diviseurs commensurables. 151

Des Diviseurs commensurables de deux dimensions. 156

Méthode d'approximation pour la résolution des Equations déterminées. 160

Des Racines imaginaires des Equations. 165

Du retour des Suites. 167

Usage des méthodes directe et inverse des séries pour resoudre ces deux Problêmes..

Un Nombre étant donné, trouver son Logarithme. 168

Un Logarithme étant donné, trouver le Nombre auquel il appartient. 170

Des Méthodes d'Élimination. 171

QUATRIÈME PARTIE.

De l'Analyse indéterminée.

Des Problêmes indéterminés du premier degré. 177

Des Problêmes indéterminés du second degré. 180

Le Problême est réduit à rendre rationel un radical du second degré : Exemples de semblables solutions. 182

Divers exemples de solutions en nombres entiers, 186

Autre Méthode pour résoudre le même Problême appliquée à quelques cas particuliers. 189

On présente la même Méthode sous une forme plus générale. 191

Conséquences de ce qui précède. 193

Application à quelques Exemples en nombres. 198

On suppose que sous le Radical du second degré, l'indéterminée est élevée à la troisième puissance. 201

Ce Radical ne peut être discuté complétement que conjointement avec celui sous lequel l'indéterminée seroit élevée à la quatrième puissance. 205

Après avoir appliqué à ce Radical des méthodes analogues aux précédentes, on passe à des exemples en nombres. 209

De la manière de rendre rationels les Radicaux du troisième degré. 211

On propose quelques exemples en nombres. 215

On ne peut faire usage des Methodes précédentes pour rendre rationels les Radicaux des degrés supérieurs que dans des cas trop particuliers pour que nous croyions devoir nous y arrêter. 218

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

TRAITÉ

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

ON a défini l'*Algèbre*, la langue de l'Analyse mathématique; et l'analyse en général, l'art d'acquérir des connoissances, en allant du connu à l'inconnu, par une suite de raisonnemens qui sont renfermés les uns dans les autres. Pour nous assurer que l'Algèbre est la plus simple de toutes les langues, nous choisirons quelques questions que nous essayerons d'abord de résoudre sans son secours.

De la manière de mettre les problêmes en équations.

1. Un père donne à trois fils une somme de 890 écus avec ces conditions : l'aîné aura 180 écus de plus que le puîné, et celui-ci 115 écus de plus que le cadet; on demande quelle sera la portion de chacun ?

Si je connoissois une des trois parts, celle du cadet, par exemple, j'y ajouterois 115 écus, & j'aurois celle du puîné; j'ajouterois ensuite 180 écus à celle du puîné, & j'aurois celle de l'aîné; la somme de ces trois parts devroit être égale à 890 écus. Les trois conditions

seroient exprimées d'une manière assez simple, en disant :

La part du cadet, plus 115 écus, eſt égale à la part du puîné ;

La part du puîné, plus 180 écus, est égale à la part de l'aîné ;

La somme de ces trois parts est égale à 890 écus.

Ces sortes d'expressions se nomment *équations*. Elles sont composées de deux membres égaux : la part du cadet, plus 115 écus, est le premier membre de la première équation ; la part du puîné est le second.

Je puis mettre dans la seconde et la troisième équations, au lieu de la part du puîné, celle du cadet, plus 115 écus, & les changer par-là en celles-ci :

La part du cadet, plus 115 écus, plus 180 écus ; ou la part du cadet, plus 295 écus, est égale à la part de l'aîné ;

La part du cadet, plus 115 écus, plus la part du cadet, plus la part de l'aîné ; ou deux fois la part du cadet, plus celle de l'aîné, plus 115 écus, font une somme égale à 890 écus.

Voilà nos trois équations réduites à deux, dans la seconde desquelles on peut mettre la part du cadet, plus 295 écus, au lieu de la part de l'aîné, & former cette seule équation :

Deux fois la part du cadet, plus la part du cadet, plus 295 écus, plus 115 écus ; ou trois fois la part du cadet, plus 410 écus, sont égales à 890 écus.

Il eſt évident que si de deux quantités égales on ôte une même quantité, les restes doivent être égaux ; je puis donc écrire :

Trois fois la part du cadet, plus 410 écus, moins 410 écus, sont égales à 890 écus, moins 410 écus ; ou trois fois la part du cadet sont égales à 480 écus ; ou même encore la part du cadet est égale au tiers de 480 écus.

Le problême est résolu ; nous l'avons réduit à chercher le tiers de 480 écus, qui est 160 écus. Ce nombre d'écus est la part du cadet ; la part du puîné sera par conséquent de 160 écus, plus 115 écus, ou de 275 écus ; celle de l'aîné de 275 écus, plus 180 écus, ou de 455 écus.

2. Si j'eusse regardé la part de l'aîné comme connue, au lieu des trois équations précédentes, j'aurois eu celles-ci :

La part de l'aîné, moins 180 écus, est égale à la part du puîné ; la part du puîné, moins 115 écus, est égale à la part du cadet ; la somme de ces trois parts est égale à 890 écus.

En mettant dans la seconde et la troisième équations, au lieu de la part du puîné, la part de l'aîné, moins 180 écus, il me vient :

La part de l'aîné, moins 180 écus, moins 115 écus ; ou la part de l'aîné, moins 295 écus, est égale à la part du cadet ;

La part de l'aîné, plus la part de l'aîné, moins 180 écus, plus la part du cadet ; ou deux fois la part de l'aîné, plus la part du cadet, moins 180 écus, font une somme égale à 890 écus. Mais je puis mettre dans la seconde de celles-ci, au lieu de la part du cadet, celle de l'aîné, moins 295 écus ; ce qui me donnera :

Deux fois la part de l'aîné, plus la part de l'aîné, moins 295 écus, moins 180 écus ; ou trois fois la part de l'aîné, moins 475 écus, sont égales à 890 écus.

Il est évident que, si à deux quantités égales on ajoute une même quantité, les sommes seront égales ; je puis donc écrire : trois fois la part de l'aîné, moins 475 écus, plus 475 écus, sont égales à 890 écus, plus 475 écus ; ou trois fois la part de l'aîné sont égales à 1365 écus.

Je trouverai donc la part de l'aîné en prenant le tiers de 1365 écus, qui est 455 écus.

3. Pour traduire en langage algébrique les équations que nous venons de former, nous exprimerons plus par +, moins par —, égale par =; nous désignerons les quantités qu'il s'agit de trouver par des lettres. Si nous désignons par x, y, z les parts du cadet, du puîné et de l'aîné, les trois conditions pourront être exprimées de la manière suivante :

$$x+115=y, y+180=z, x+y+z=890.$$

En tirant de la première équation la valeur de y, et la substituant dans les deux autres, je trouve celles-ci :

$$x+115+180=z, x+x+115+z=890,$$

qui, toutes réductions faites, deviennent

$$x+295=z, 2x+z+115=890.$$

Par la substitution de la valeur de z, je parviens à une seule équation,

$$2x+x+295+115=890,$$

qu'on réduit à

$$3x+410=890.$$

Nous avons exprimé les trois conditions d'une autre manière que nous pouvons traduire comme il suit :

$$z-180=y, y-115=x, x+y+z=890.$$

En éliminant y, nous réduirons d'abord ces trois équations à deux,

$$z-180-115=x, x+z-180+z=890,$$

qui ne sont autres que

$$z-295=x, x+2z-180=890$$

et de ces dernières on tirera, par l'élimination de x,

$$2z + z - 295 - 180 = 890,$$
$$\text{ou } 3z - 475 = 890.$$

4. Ce principe; si à deux quantités égales on ajoute une même quantité, les sommes seront égales : si de deux quantités égales on ôte une même quantité, les restes seront égaux; ce principe, dis-je, nous conduit évidemment à cette règle générale :

Pour faire passer une quantité d'un des membres de l'équation dans l'autre, il faut l'écrire dans cet autre avec un signe contraire; avec le signe +, si elle avoit dans le premier membre le signe —; avec le signe —, si elle avoit dans le premier membre le signe +. En appliquant cette règle aux deux équations,

$$3x + 410 = 890, \quad 3z - 475 = 890,$$

on les change en celles-ci :

$$3x = 890 - 410 = 480,$$
$$3z = 890 + 475 = 1365,$$

desquelles on tire

$$x = 160, \quad z = 455.$$

5. Nous aurions pu résoudre le problème d'une autre manière, et dire :

La part du cadet étant exprimée par x,
celle du puîné doit l'être par $x + 115$,
et celle de l'aîné par $x + 115 + 180$;
ajoutant ces trois parts, on aura $3x + 410$,

laquelle somme doit être égale à 890; donc

$$3x + 410 = 890, \text{ ou } 3x = 480.$$

Nous autions pu dire aussi :

La part de l'aîné étant exptimée par x,
celle du puîné doit l'être par $x - 180$,
et celle du cadet par $x - 180 - 115$;
ajoutant ces trois parts, on aura $3x - 475$,
laquelle somme doit être égale à 890; donc

$$3x - 475 = 890, \text{ ou } 3x = 1365.$$

6. Nous nous proposerons pour second problême de trouver deux nombres dont on connoît la somme et la différence; par la différence on entend ce qui reste, ayant ôté le plus petit nombre du plus grand. Si la somme de ces deux nombres est 125 et la différence 9, les conditions pourtont être exprimées comme il suit :

Le plus petit, plus le plus grand, est égal à 125;
Le plus grand, moins le plus petit, est égal à 9;

ou de cette autre manière :

Le plus grand est égal à 125, moins le plus petit;
Le plus grand est égal à 9, plus le plus petit;

En égalant entr'elles les valeurs du plus grand, tout ést réduit à cetre seule équation,

125, moins le plus perit, est égal à 9, plus le plus petit.

A ces deux quantités égales, j'ajoute une même quantité, qui est le plus petit, et il vient :

125 est égal à 9, plus deux fois le plus petit.

De ces deux autres quantités égales, j'ôte une même quantité, qui est 9, et l'équation est réduite à

116 est égal à deux fois le plus petit.

Donc le plus petit est égal à 58 : et, comme le plus grand doit être égal au plus petit plus 9, la valeur du plus grand sera 67.

Nous abrégerons beaucoup en nommant y le plus grand nombre, et x le plus petit ; alors nos deux équations pourront être écrites comme il suit :

$$y + x = 125, y - x = 9,$$

desquelles on tire :

$$y = 125 - x, y = 9 + x, \text{ et } 125 - x = 9 + x.$$

On peut faire passer x dans le second membre avec le signe +, et 9 dans le premier avec le signe —, d'où il résultera :

$$2x = 125 - 9 = 116, \text{ et } x = 58.$$

Mais $y = 9 + x$; donc $y = 67$.

7. On peut multiplier les deux membres d'une équation par une même quantité, sans que cette équation cesse d'être la même. On ne changera donc rien à l'équation $y = 9 + x$, en l'écrivant de cette manière : $2y = 18 + 2x$; mais $2x = 125 - 9$; donc $2y = 18 + 125 - 9 = 125 + 9$. Donc $2y$ étant égal à $125 + 9$, on a $2x = 125 - 9$.

Prenons 235 pour la somme des deux nombres et 48 pour leur différence ; nous aurons $y + x = 235$, $y - x = 48$, desquelles nous tiretons encore $2y = 235 + 48$ et $2x = 235 - 48$.

Après un grand nombre d'exemples semblables, on sera tenté de conclure, que des deux nombres demandés, le plus grand est égal à la moitié de la somme plus la moitié de la différence, et le plus peti à la moitié de la somme moins la moitié de la différence : mais les analystes ne se contentent pas toujours de semblables

inductions, et l'algèbre leur offre les moyens d'arriver sans cela aux résultats les plus généraux.

8. Pour y parvenir dans le cas dont il s'agit, ils représenteront par a la somme des deux nombres demandés, et par b leur différence. Ils formeront les deux équations,

$$y + x = a,\ y - x = b,$$

desquelles il résulte :

$$y = a - x,\ y = b + x,$$
$$a - x = b + x,\ 2x = a - b.$$

Mais de $y = b + x$, on tire $2y = 2b + 2x = 2b + a - b$, ou $2y = a + b$. Donc y étant $= \frac{a+b}{2}$, on a $x = \frac{a-b}{2}$.

On eût tiré de $y = a - x$, $2y = 2a - 2x = 2a - a + b$, ou $2y = a + b$, comme de l'autre manière. Cependant on pourroit peut-être ne pas voir du premier coup-d'œil que pour ôter $a - b$ de $2a$, il suffit d'écrire $2a - a + b$; c'est-à-dire, qu'il suffit d'écrire la quantité qu'on soustrait avec un signe différent de celui qu'elle a. Pour s'en convaincre, on reprendra l'équation $2y + 2x = 2a$, où l'on mettra pour $2x$ sa valeur $a - b$, et l'on aura $2y + a - b = 2a$, puis $2y = 2a - a + b$, car toute quantité doit prendre un signe contraire en passant d'un des membres de l'équation dans l'autre.

Donc, quelle que soit la somme a et la différence b, le plus grand nombre est toujours égal à la moitié de la somme plus la moitié de la différence, et le plus petit à la moitié de la somme moins la moitié de la différence. C'est ainsi que l'analyste, en donnant à son langage la plus grande généralité, parvient directement à des résultats qui comprennent tous les cas particuliers.

Ces résultats sont ce que les géomètres nomment des *théorêmes*.

9. Je demande encore de déterminer les trois nombres x, y et z, au moyen de trois conditions que j'exprime comme il suit :

$$x + y - z = a, \; x + z - y = b,$$
$$y + z - x = c;$$

a, b, c sont des quantités connues. On tire de la première $y - z = a - x$, de la seconde $z - y = b - x$ ou $y - z = x - b$. On tire donc des deux premières $a - x = x - b$, ou $2x = a + b$. On tire de la 2e, $x - y = b - z$; de la 3e, $y - x = c - z$ ou $x - y = z - c$. On tire donc de la 2e et 3e, $b - z = z - c$, ou $2z = b + c$. On tire de la première $x - z = a - y$; de la 3e, $z - x = c - y$ ou $x - z = y - c$. On tire donc de la première et 3e, $a - y = y - c$, ou $2y = a + c$. Ainsi a, b, c, étant des quantités connues, si

$$x + y - z = a, \; x + z - y = b,$$
$$y + z - x = c,$$

ces conditions suffiront pour déterminer x, y, z; et on aura

$$2x = a + b, \; 2y = a + c, \; 2z = b + c.$$

S'il n'y avoit que deux conditions exprimées par

$$x + y - z = a, \; x + z - y = b,$$

on en tireroit encore $2x = a + b$; mais ensuite il n'y auroit plus qu'une seule condition pour déterminer y et z, qui seroit exprimée par $2(y - z) = a - b$. Ainsi la valeur de x est seule déterminée; celles de y et z ne le sont pas : nous savons seulement que la différence $y - z$ doit être la moitié de la différence $a - b$, et il

y a une infinité de nombres à prendre pour y et z qui satisferont à cette condition.

Voilà donc deux genres de problêmes ; problêmes déterminés, lorsqu'il y a autant de conditions que d'inconnues ; problêmes indéterminés, lorsqu'il y a moins de conditions que d'inconnues. Ces deux genres de problêmes partagent l'analyse mathématique en deux parties bien distinctes.

Des premières règles de l'Algèbre.

10. La langue qu'on nomme Algèbre est composée de beaucoup d'autres signes que ceux que nous avons déjà fait connoître. Le signe $\times$ indique la multiplication ; pour indiquer que 64 est multiplié par 125, on écrit 64×125 ; pour indiquer que le binome $x - 5$ est multiplié par le trinome $x + y - 7$, on écrit $\overline{x - 5} \times \overline{x + y - 7}$, ou $(x - 5) \times (x + y - 7)$. On est convenu en même temps que deux lettres qui se suivent, sans aucun signe entr'elles, sont censées se multiplier. Ainsi $x\,y\,z$ doit être regardé comme le produit des trois facteurs x, y, z ; $x\,x\,x$ comme le produit des trois facteurs égaux x, x, x. Dans le cas de facteurs égaux, on se contente d'écrire la lettre en plaçant au-dessus et à droite un chiffre qui désigne le nombre de fois qu'elle auroit été répétée par la multiplication. On se contentera donc d'écrire x^3 au lieu de $x\,x\,x$, x^5 au lieu de $x\,x\,x\,x\,x$, etc. La lettre au-dessus de laquelle un chiffre est placé, est dite être élevée à la puissance exprimée par ce chiffre, qu'on appelle exposant ; x^2 est élevé à la seconde puissance, x^3 à la troisième, x^5 à la cinquième, etc. Le nombre qui est à la gauche de la lettre et sur la même ligne, se nomme coefficient ; dans $17\,x^3$, par exemple, 17 est le coefficient, et 3 l'exposant.

11. On propose de multiplier $5\,a^2$ par $7\,a^3$. On remarquera que $5\,a^2$ n'est autre chose que $5\,a\,a$, et $7\,a^3$ autre chose que $7\,a\,a\,a$; donc $5\,a^2 \times 7\,a^3 = 5 \times 7\,a\,a\,a\,a\,a = 35\,a^5$. On démontrera de la même manière que $6\,a^4 \times 9\,a^5 = 54\,a^9$; que $10\,a^7 \times 12\,a^8 = 120\,a^{15}$, et généralement que $a\,x^m \times b\,x^n = a\,b\,x^{m+n}$; c'est à-dire, que le produit demandé a pour coefficient le produit des coefficiens des deux facteurs, et pour exposant la somme des exposans des mêmes facteurs. La démonstration précédente ne comprend que les cas où m et n seroient des nombres entiers; mais nous démontrerons que la règle s'étend à toutes les valeurs possibles des exposans m et n.

12. On nomme multiplicande et multiplicateur les deux facteurs de la multiplication. Quant à la division, on appelle dividende le nombre qu'on divise, diviseur celui par lequel on divise, et quotient un troisième nombre résultat de la division. Pour indiquer une division, on écrit l'un sous l'autre le dividende et le diviseur avec une barre entre deux; pour indiquer que a est divisé par b, on écrit $\frac{a}{b}$; que $a^2 - x^2$ est divisé par $a + x$, on écrit $\frac{a^2-x^2}{a+x}$.

On représente une fraction de la même manière, en écrivant l'un sous l'autre les nombres qui la composent avec une barre entre deux. Dans la fraction $\frac{7}{8}$, qu'on prononce *sept huitièmes*, le nombre qui est au-dessous de la barre marque que l'unité principale a été divisée en huit parties égales; on le nomme dénominateur: celui qui est au-dessus de la barre, qui exprime le nombre de huitièmes que l'on prend, s'appelle numérateur. Les propositions que nous allons démontrer sur les fractions, conviendront également aux divisions indiquées, nous ne mettrons aucune différence entre elles.

Principes fondamentaux de la théorie des Fractions.

13. Si on multiplie le numérateur d'une fraction par un nombre entier, on la rend autant de fois plus grande que le multiplicateur contient d'unités; on la rendroit autant de fois plus petite que le multiplicateur contiendroit d'unités, si on multiplioit le dénominateur par ce nombre entier; elle ne changeroit pas de valeur, si on multiplioit le numérateur et le dénominateur par le même nombre. On ne changera pas non plus la valeur d'une fraction, en divisant son numérateur et son dénominateur par une même quantité; et c'est de cette manière qu'on parvient à rendre une fraction plus simple et à la réduire à ses moindres termes. En divisant le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{36}{42}$ par 6, on la réduit à $\frac{6}{7}$, qui est beaucoup plus simple, qui est même la proposée réduite à ses moindres termes, puisque 6 et 7 n'ont pas de diviseur commun. Ces principes, qui n'ont pas besoin d'un plus grand développement, suffiront pour nous diriger dans les opérations que nous avons à faire sur les fractions.

14. Pour réduire au même dénominateur tant de fractions qu'on voudra, sans rien changer à la valeur de ces fractions, on multipliera ensemble tous les dénominateurs, et le produit sera le dénominateur que doivent avoir les fractions réduites à la même dénomination; et, pour qu'en changeant de dénominateur chacune des fractions ne change point de valeur, on multipliera son numérateur par tous les dénominateurs, excepté celui qu'elle a. Ainsi, pour réduire au même dénominateur les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, on multipliera ensemble 2, 3, 4, 5, 6; ce qui donnera pour dénominateur commun 720. On multipliera ensuite le numérateur 1 par 3, 4, 5, 6; le numérateur 2 par 2, 4, 5, 6; le numérateur 3

par 2, 3, 5, 6; le numérateur 4 par 2, 3, 4, 6; le numérateur 5 par 2, 3, 4, 5; ce qui donnera ces cinq fractions :

$$\frac{360}{720},\ \frac{480}{720},\ \frac{540}{720},\ \frac{576}{720},\ \frac{600}{720},$$

qui ne sont autres que les proposées réduites à la même dénomination. Au lieu d'opérer comme nous venons de faire, nous aurions pu chercher directement un nombre qui soit divisible par tous les dénominateurs, et prendre ce nombre le moindre possible, pour arriver d'un seul coup au résultat le plus simple. Le nombre 60 est comme 720, divisible par 2, 3, 4, 5, 6; si nous prenons 60 pour dénominateur commun, les fractions proposées seront changées en celles-ci :

$$\frac{30}{60},\ \frac{40}{60},\ \frac{45}{60},\ \frac{48}{60},\ \frac{50}{60},$$

les plus simples que l'on puisse trouver.

15. Une fois que des fractions sont réduites au même dénominateur, il est facile de les ajouter ensemble.

On voit sans difficulté que la somme des cinq fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, est égale à

$$\frac{30+40+45+48+50}{60} = \frac{213}{60}.$$

La fraction résultante pourra renfermer des entiers, qu'on trouvera en divisant le numérateur par le dénominateur; le reste de la division, s'il y en a, sera le numérateur d'une fraction qui aura le diviseur pour dénominateur, laquelle devra être ajoutée au nombre des entiers. On trouvera de cette manière $\frac{213}{60} = 3\frac{33}{60} = 3\frac{11}{20}$.

Pour soustraire l'une de l'autre deux fractions, on les réduira au même dénominateur; on retranchera ensuite l'un de l'autre les deux numérateurs.

16. Nous avons vu que pour multiplier une fraction

par un nombre entier, il suffisoit de multiplier par ce nombre le numérateur ; et réciproquement, que pour diviser une fraction par un nombre enrier, il suffisoit de multiplier par ce nombre le dénominateur.

On demande de multiplier une fraction par une fraction, $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{8}$. Si on se contentoit de multiplier $\frac{3}{4}$ par 5, on obtiendroit la fraction $\frac{15}{4}$, qui est huit fois plus grande que le produit desiré. Il faut donc diviser $\frac{15}{4}$ par 8 pour avoir ce produit ; ainsi

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{32}.$$

En général, pour multiplier une fraction par une fraction, il faut former deux produits, l'un des deux numérateurs, l'autre des deux dénominateurs ; le premier produit sera le numérateur, le second le dénominateur du produit des deux fractions.

Réciproquement, pour diviser une fraction par une fraction, on formera deux produits, l'un du numérateur de la fraction dividende par le dénominateur de la fraction diviseur, l'autre du dénominateur de la fraction dividende par le numérateur de la fraction diviseur ; le premier produit sera le numérateur, le second le dénominateur du quotient des deux fractions.

Une fraction de fraction n'est autre chose que le produit des deux fractions par lesquelles elle est exprimée. Ainsi la fraction de fraction $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$; la fraction de fraction de fraction $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6} = \frac{3}{4}$ de $\frac{5}{9}$ $= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$; et ainsi de suite.

17. Il nous reste à parler des fractions décimales. Ayant marqué la place des unités simples, si l'on met une virgule à la droite de ce chiffre, et qu'après cette virgule on écrive tant d'autres chiffres qu'on voudra, ces chiffres nombreront des unités qui seront d'autant plus sous-décuples de l'unité simple, qu'ils seront plus reculés. Dans ce nombre 6,489352, le chiffre 4, qui est immédiatement à la droite de la

virgule, a des unités sous-décuples, ou dix fois plus petites que celles du chiffre 6, on les appelle des dixièmes ; les unités du chiffre 8 sont des dixièmes de celles du chiffre 4, et des centièmes de celles du chiffre 6 ; les unités du chiffre 9 sont des dixièmes de celles du chiffre 8, des centièmes de celles du chiffre 4, des millièmes de celles du chiffre 6 ; les unités des chiffres suivans 3, 5, 2, devenant continuellement sous-décuples, seront des dix-millièmes, des cent-millièmes, des millionièmes parties de l'unité principale. Le nombre 6,489352 doit être lu comme s'il étoit écrit de cette manière : 6 unités principales et 489352 millionièmes.

18. Les deux premières règles d'arithmétique sur les nombres qui renferment des décimales, se font de la même manière que sur les nombres qui n'en renferment pas.

Exemples d'une Addition et d'une Soustraction.

7834,49	22028,1576
8367,078	5826,5896
5826,5896	16201,568
22028,1576	

La multiplication et la division ne présentent pas de plus grandes difficultés. Pour multiplier deux nombres qui contiennent des décimales, on opère comme si aucun d'eux n'en contenoit, et dans le produit on met une virgule qui sépare vers la droite autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le multiplicande et le multiplicateur. Pour diviser deux nombres qui contiennent des décimales, on commencera par rendre les unités du dividende et celles du diviseur de la même espèce, en mettant après les décimales du terme qui a moins de chiffres décimaux, autant de zéros

qu'il en faut pour que le dividende et le diviseur aient le même nombre de caractères après la virgule. Le dividende et le diviseur étant ainsi préparés, on les divisera l'un par l'autre, sans faire attention aux virgules qu'on peut supprimer.

Exemples d'une Multiplication et d'une Division.

$7,32 \times 9,548 = \frac{732}{100} \times \frac{9548}{1000} = \frac{6989136}{100000} = 69,89136.$

$\frac{69,89136}{9,548} = \frac{6989136}{100000}$ divisé par $\frac{9548}{1000} = \frac{6989136}{100000}$ divisé par $\frac{954800}{100000} = \frac{6989136}{954800}$.

En effectuant la division, je trouve au quotient 7 unités principales et un reste 305536, que je multiplie par 10 et que je divise par 954800, pour avoir une décimale au quotient; je multiplie le nouveau reste par 10, et je le divise par 954800, pour avoir deux décimales au quotient, et ainsi de suite. Comme dans cet exemple, 305536 est exactement divisible par 9548 et donne 32 au quotient, j'en dois conclure que le quotient de 69,89136 divisé par 9,548 est exactement 7,32.

19. Le second problème est donc réduit à diviser un nombre par un autre, et à pousser la division jusqu'à ce que le quotient approché ne diffère pas du vrai d'une unité décimale de tel ordre qu'on voudra; et ce problème renferme celui de réduire une fraction ordinaire en fraction décimale, en approchant de la vraie valeur aussi près qu'il sera nécessaire.

Exemples de semblables réductions.

$\frac{1}{3} = 0,3333....$ $\frac{1}{6} = 0,6666....$

$\frac{1}{7} = 0,142857142857.....$

$\frac{1}{9} = 0,1111....$ $\frac{26}{99} = 0,2626....$

$\frac{450}{999} = 0,450450...$ $\frac{45}{990} = 0,04545....$

Lorsque

Lorsque les mêmes chiffres reviennent ainsi dans un quotient, il suffit de connoître deux périodes de chiffres semblables, pour être assuré qu'en continuant la division on trouvera toujours les mêmes périodes.

20. Lorsque le diviseur est égal au dividende, le quotient de la division est égal à l'unité; ainsi les fractions $\frac{a}{a}$, $\frac{a^2}{a^2}$, $\frac{a^3}{a^3}$ .... $\frac{a^n}{a^n}$, peuvent toujours être prises pour l'unité.

Il suit de-là que, si dans le numérateur et le dénominateur d'une fraction les mêmes lettres se rencontrent, on peut les supprimer; qu'au lieu de $\frac{a^4\,b\,c\,e}{a^2\,b\,c\,d}$ on peut écrire $\frac{a^2\,e}{d}$; car $\frac{a^4\,b\,c\,e}{a^2\,b\,c\,d} = \frac{a^2}{a^2} \times \frac{b}{b} \times \frac{c}{c} \times \frac{a^2 \cdot e}{d} = \frac{a^2\,e}{d}$. Mais $\frac{a^4}{a^2} = a^2$ n'est autre chose que a^{4-2}, de même $\frac{a^7}{a^3} = a^4$ est égal à a^{7-3}; donc en général $\frac{a^m}{a^n}$ doit être égal à a^{m-n}; c'est-à-dire, que dans la division on soustrait les exposans comme on les ajoute dans la multiplication; et, de même que le produit de $a\,x^m$ par $b\,x^n$ est égal à $a\,b\,x^{m+n}$, le quotient de $a\,x^m$ divisé par $b\,x^n$ doit être égal à $\frac{a}{b}\,x^{m-n}$: on suppose encore que les exposans sont des nombres entiers. Une autre remarque, c'est que $\frac{a^m}{a^m} = 1$, étant aussi égal à $a^{m-m} = a^0$, il faut en conclure que toute quantité élevée à la puissance 0 peut être prise pour l'unité.

De l'élévation aux puissances et de l'extraction des racines.

21. Nous avons nommé seconde puissance de x^m, le produit de x^m par $x^m = x^{m+m} = x^{2m}$; troisième

puissance, $x^m \times x^m \times x^m = x^{m+m+m} = x^{3m}$; quatrième puissance, $x^m \times x^m \times x^m \times x^m = x^{m+m+m+m} = x^{4m}$, etc.; généralement pour élever x^m à une puissance entière quelconque, il faut multiplier l'exposant m de x par le nombre entier qui est l'exposant de la puissance à laquelle on veut élever x^m. Si ce nombre est r, on aura $(x^m)^r$ ou x^m élevé à la puissance r, égal à x^{rm}.

22. On appelle racine, la quantité qui, étant multipliée par elle-même un certain nombre de fois, produit la puissance. Cette racine doit se trouver en divisant l'exposant de la puissance par le nombre qui est l'exposant de la racine; si c'est la racine seconde qu'on veut trouver, on divisera l'exposant par 2; on le divisera par 3, si c'est la racine 3e; par 4, si c'est la racine quatrième, etc. Prenons pour exemple 64; il est en même temps la 2e puissance de 8, la 3e puissance de 4 et la 6e puissance de 2; ou, ce qui revient au même, 8 est la racine 2e de 64, 4 est sa racine 3e et 2 sa racine 6e. Or, 64 étant égal à $(2)^6$, sa racine $2^e = (2)^{\frac{6}{2}} = (2)^3 = 8$; sa racine $3^e = (2)^{\frac{6}{3}} = (2)^2 = 4$; sa racine $6^e = (2)^{\frac{6}{6}} = (2)^1 = 2$. On aura aussi $(64)^{\frac{1}{2}} = 8$, $(64)^{\frac{1}{3}} = 4$, $(64)^{\frac{1}{6}} = 2$, qu'on peut changer en celles-ci $64 = (8)^2$, $64 = (4)^3$, $64 = (2)^6$; on changera de même $(2)^{\frac{6}{2}} = 8$, $(2)^{\frac{6}{3}} = 4$, en $(2)^6 = (8)^2$, $(2)^6 = (4)^3$.

23. Pour élever une quantité fractionnaire à une puissance entière quelconque, il faut élever à cette puissance le numérateur et le dénominateur; pour extraire une racine quelconque d'une quantité fractionnaire, il faut extraire cette racine du numérateur et du dénominateur. Si l'on en veut un exemple en nombre, on prendra

$\frac{(4)^3}{(2)^4}$ dont la puissance 2e doit être $\frac{(4)^6}{(2)^8}$; en effet $\frac{(4)^3}{(2)^4} = \frac{64}{16} = 4$ dont la puissance 2^e $= 16$, et $\frac{(4)^6}{(2)^8} = \frac{4096}{256} = 16$. On prendra $\frac{(4)^6}{(2)^3}$ dont la racine 3e doit être $\frac{(4)^2}{2}$; en effet $\frac{(4)^6}{(2)^3} = \frac{4096}{8} = 512$ dont la racine 3e est 8, et $\frac{(4)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$. Ainsi la puissance r de $\frac{x^m}{y^n} = \frac{x^{rm}}{y^{rn}}$, et la racine r de la même quantité fractionnaire $= \frac{x^{\frac{m}{r}}}{y^{\frac{n}{r}}}$.

24. Les puissances successives de quantités égales étant des quantités égales, si $x^{\frac{m}{r}} = u$, la puissance r de $x^{\frac{m}{r}}$, ou x^m, doit être égale à la puissance r de u. Ayant donc une équation de cette forme $x^{\frac{m}{r}} = u$, on peut toujours se débarasser de l'exposant fractionnaire ; en élevant les deux membres à la puissance r et écrire $x^m = u^r$. Cette transformation servira à démontrer que le produit de $x^{\frac{m}{r}}$ par $x^{\frac{n}{s}} = x^{\frac{m}{r}+\frac{n}{s}}$, et que le quotient de $x^{\frac{m}{r}}$ divisé par $x^{\frac{n}{s}} = x^{\frac{m}{r}-\frac{n}{s}}$, comme lorsque les exposans étoient des nombres entiers. En effet, en réduisant $\frac{m}{r} + \frac{n}{s}$ et $\frac{m}{r} - \frac{n}{s}$ au même dénominateur, on tire des deux équations précédentes,

$$x^{\frac{m}{r}} \times x^{\frac{n}{s}} = x^{\frac{ms+nr}{rs}}, \quad \frac{x^{\frac{m}{r}}}{x^{\frac{n}{s}}} = x^{\frac{ms-nr}{rs}}.$$

On élevera les deux membres à la puissance r, et on aura

$$x^m \times x^{\frac{nr}{s}} = x^{\frac{ms+nr}{s}}, \quad \frac{x^m}{x^{\frac{nr}{s}}} = x^{\frac{ms-nr}{s}};$$

on élèvera les deux membres de celles-ci à la puissance s, et on aura

$$x^{ms} \times x^{nr} = x^{ms+nr}, \quad \frac{x^{ms}}{x^{nr}} = x^{ms-nr},$$

comme cela doit être, puisque par l'hypothèse ms et nr sont des nombres entiers. Donc m et n étant entiers ou fractionnaires,

$$a x^m \times b x^n = a b x^{m+n}, \quad \frac{a x^m}{b x^n} = \frac{a}{b} x^{m-n}.$$

25. Pour indiquer une racine, on emploie le caractère $\surd$, qu'on appelle signe radical. On ne met aucun nombre au-dessus, si c'est la racine seconde, ou la racine quarrée qu'on veut indiquer; on met sur le radical un 3 pour indiquer la racine cube ou la racine 3e.; un 4 pour indiquer la racine 4e., et ainsi de suite. Ainsi ces expressions $x^{\frac{m}{2}}$, $x^{\frac{m}{3}}$, $x^{\frac{m}{4}}$ ..... $x^{\frac{m}{r}}$, sont identiquement les mêmes que celles-ci : $\surd x^m$, $\sqrt[3]{x^m}$, $\sqrt[4]{x^m}$, ... $\sqrt[r]{x^m}$. Au lieu de la petite barre qui surmonte le signe radical, on peut se servir de parenthèses de la manière suivante : $\surd (x^m)$, $\sqrt[3]{(x^m)}$, $\sqrt[4]{(x^m)}$..... $\sqrt[r]{(x^m)}$.

On demande de multiplier $\sqrt[r]{x^m}$ par $\sqrt[s]{x^n}$? Par la

définition $\sqrt[r]{x^m} = x^{\frac{m}{r}}$, $\sqrt[s]{x^n} = x^{\frac{n}{s}}$; donc $\sqrt[r]{x^m} \times \sqrt[s]{x^n} = x^{\frac{ms+nr}{rs}} = \sqrt[rs]{x^{ms+nr}}$.

On demande de diviser $\sqrt[r]{x^m}$ par $\sqrt[s]{x^n}$? Il est clair que le quotient de cette division $= x^{\frac{ms-nr}{rs}} = \sqrt[rs]{x^{ms-nr}}$.

26. Après ces opérations, il reste quelquefois des réductions à faire qui présentent des difficultés, sur-tout lorsqu'il s'agit de nombres. Il est clair que $\sqrt[3]{a^3 b d}$ se réduit à $a\sqrt[3]{b d}$; mais on ne voit pas aussi aisément comment on peut réduire à leurs plus simples expressions $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[4]{32}$. Pour y parvenir, il faut décomposer ces nombres en leurs facteurs, et voir parmi ces facteurs ceux qui sont des quarrés, des cubes, des quatrièmes puissances, etc.: or, $50 = 2 \times 25$, $24 = 3 \times 8$, $32 = 2 \times 16$; donc $\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 25} = 5\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \times 8} = 2\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2 \times 16} = 2\sqrt[4]{2}$.

On propose de réduire à sa plus simple expression:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b} c^5} \times \sqrt[4]{a c^3}}{b\sqrt{\frac{a}{c}}}?$$

Cette quantité peut se changer en celle-ci :

$$\frac{\frac{a^{\frac{2}{3}}\,c^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}} \times a^{\frac{1}{4}}\,c^{\frac{1}{4}}}{\frac{b^{\frac{a}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}\,c^{\frac{1}{3}}\,b^{-\frac{1}{3}}\,a^{\frac{1}{4}}\,c^{\frac{1}{4}}}{b\,a^{\frac{1}{2}}\,c^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$a^{\frac{2}{3}}\,c^{\frac{1}{3}}\,b^{-\frac{1}{3}}\,a^{\frac{1}{4}}\,c^{\frac{1}{4}}\,b^{-1}\,a^{-\frac{1}{2}}\,c^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}}\,a^{\frac{1}{4}}\,a^{-\frac{1}{2}}\,b^{-\frac{1}{3}}\,b^{-1}\,c^{\frac{1}{3}}\,c^{\frac{1}{4}}\,c^{\frac{1}{2}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\,b^{-\frac{1}{3}-1}\,c^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{12}}\,b^{-\frac{4}{3}}\,c^{\frac{11}{12}}$$

$$= \frac{a^{\frac{5}{12}}\,c^{\frac{11}{12}}}{b^{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt[12]{a^5\,c^{35}}}{\sqrt[3]{b^4}} = \frac{\sqrt[12]{a^5\,c^{11+24}}}{\sqrt[3]{b^3\,b}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{a^5\,c^{11}\,c^{24}}}{b\sqrt[3]{b}} = \frac{c^2\sqrt[12]{a^5\,c^{11}}}{b\sqrt[3]{b}}.$$

Toutes ces combinaisons de signes constituent la langue qu'on nomme Algèbre ; il est nécessaire de se la rendre bien familière.

Des proportions arithmétiques et géométriques.

27. On appelle rapport ou raison, le résultat de la comparaison de deux grandeurs. Cette comparaison d'une grandeur avec une autre, peut se faire de deux manières ; soit en considérant leur différence, c'est-à-dire la quantité dont l'une surpasse l'autre ou en est surpassée, laquelle différence se nomme rapport ou raison arithmétique ; soit en considérant combien de fois l'une contient l'autre ou y est contenue, et

ce nombre de fois se nomme rapport ou raison géométrique. Il suit de cette définition qu'il n'y a de rapport arithmétique ou géométrique qu'entre des quantités de même espèce ; que le rapport arithmétique, étant la différence de deux grandeurs, doit être de même espèce qu'elles ; que le rapport géométrique, étant le nombre de fois que l'une des grandeurs contient l'autre, ne peut être qu'un nombre abstrait.

28. Il ne peut y avoir de rapport géométrique qu'entre des quantités de même espèce, et cependant on se sert communément d'expressions qui indiquent le contraire. On dit, par exemple, que la vîtesse est proportionnelle à l'espace divisé par le temps ; que la pesanteur spécifique est proportionnelle au poids du corps divisé par son volume. Mais on ne s'exprime ainsi que par abréviation ; pour parler rigoureusement il faudroit dire : la vîtesse est proportionnelle au quotient de la division de deux rapports, dont l'un est celui de l'espace à l'unité d'espace, l'autre celui du temps à l'unité de temps ; la pesanteur spécifique est proportionnelle au quotient de la division de deux rapports, dont l'un est celui du poids à l'unité de poids, l'autre celui du volume à l'unité de volume. Dans chaque espèce de grandeurs, on en prend une pour unité, et cette unité, qui est absolument arbitraire, sert de mesure pour déterminer les rapports des grandeurs de son espèce.

29. Lorsque l'on compare deux grandeurs, celle qu'on écrit la première se nomme antécédent et l'autre conséquent : on appelle aussi proportion, l'égalité de deux rapports. Ainsi $12 - 3 = 16 - 7$ est une proportion arithmétique, qu'on écrit encore de cette autre manière, $12 . 3 : 16 . 7$; $\frac{12}{4} = \frac{27}{9}$ est une proportion géométrique, qu'on écrit de cette autre manière : $12 : 4 :: 27 : 9$. Dans la proportion arithmétique et dans la proportion géométrique, le premier et le

quatrième termes se nomment les extrêmes, le second et le troisième s'appellent les moyens. L'analyste, après avoir examiné quelques proportions, tant arithmétiques que géométriques, cherchera à en découvrir les propriétés de la manière la plus simple, en faisant usage de la langue dont on vient de lui exposer les principes.

30. Il représentera toute porportion arithmétique par $a. b : m. n$; alors a étant plus grand que b et m plus grand que n, si l'on fait $a - b = d$, on aura aussi $m - n = d$, d'où l'on tirera $a = b + d$, $m = n + d$, et la proportion sera changée en celle-ci : $b + d. b : n + d. n$, où l'on voit bien clairement que la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens : c'est la propriété fondamentale de toutes proportions arithmétiques. L'analyste ne négligera aucune occasion d'introduire les signes propres à simplifier le langage ; il se servira des signes $>$ et $<$ pour exprimer plus grand et plus petit ; ainsi $a > b$ indiquera que a est plus grand que b, et $b < a$ indiquera que b est moindre que a.

31. Il représentera toute proportion géométrique par $a : b :: m : n$; et supposant $\frac{a}{b} = q$, il verra aisément qu'on doit aussi avoir $\frac{m}{n} = q$. Donc $a = bq$, $m = nq$; et la proportion peut prendre cette autre forme $bq : b :: nq : n$, où l'on voit que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : c'est la propriété fondamentale de toute proportion géométrique. Il conclura des deux théorêmes qu'il est facile de trouver le quatrième terme d'une proportion arithmétique et d'une proportion géométrique dont les trois autres sont connus. On appelle plus particulièrement règle de trois, celle qui nous apprend à trouver le quatrième terme d'une proportion géométrique dont les trois autres sont connus.

Exemple d'une Règle de trois.

32. Soixante hommes, en travaillant 8 heures par jour, ont fait en 12 jours un fossé long de 20 mètres, large de 5 et profond de 7; on demande quelle sera la longueur d'un fossé large de 4 mètres et profond de 6, que 50 hommes feront en 15 jours dans le même terrein, en travaillant 6 heures par jour? Nommons x la longueur du fossé que nous desirons connoître; nous distinguerons ensuite deux effets produits par deux causes différentes. La première cause, c'est le travail de 60 hommes pendant 12 jours, en employant 8 heures par jour, lequel travail, mathématiquement parlant, équivaut à celui de 5760 hommes pendant une heure. L'effet qui en résulte est un fossé long de 20 mètres, large de 5 et profond de 7; le produit de ces trois dimensions est un parallélipipède de 700 mètres cubes. La seconde cause est le travail de 50 hommes pendant 15 jours en employant 6 heures par jour, qui équivaut à celui de 4500 hommes pendant une heure. L'effet qui en résulte est un fossé large de 4 mètres, profond de 6, dont la longueur est x. Or, comme ici les causes doivent être entr'elles comme les effets qu'elles produisent, on aura cette proportion: Le travail de 5760 hommes pendant une heure, est au travail aussi pendant une heure de 4500 hommes, comme le fossé de 700 mètres cubes, est au fossé de $24x$ mètres cubes.

Mais les rapports de chacune des deux causes à son unité de convention sont des nombres abstraits, comme les rapports de chacun des parallélipipèdes à son unité de convention qui est le mètre cube; on aura donc entre des nombres abstraits cette proportion, $5760 : 4500 :: 700 : 24x$, qui devient, en divisant le premier et le second terme par le facteur commun 10, $576 : 450 :: 700 : 24x$. On en tire, en faisant le

produit des extrêmes égal au produit des moyens, $13824\,x = 315000$, et $x = 22,78$ mètres à peu de choses près.

33. Lorsque l'effet produit est d'autant plus grand que la cause est moindre, ou d'autant moindre que la cause est plus grande, on dit qu'il est réciproquement comme la cause ou en raison inverse de la cause. Si a est en raison inverse de m, il est en raison directe de $\frac{1}{m}$; car la fraction $\frac{1}{m}$ est d'autant plus grande que m est moindre et d'autant moindre que m est plus grand. Ainsi tout rapport ou toute raison inverse peut être facilement changé en un rapport direct ou en une raison directe.

Deuxième Exemple d'une Règle de trois.

34. 400 hommes en travaillant 9 heures par jour ont été 54 jours à creuser un canal de 1735 mètres de long sur 23 de large et 9 de profondeur; on demande en combien de jours 780 hommes, travaillant 10 heures par jour, creuseront un autre canal de 2843 mètres de long sur 35 de large et 15 de profondeur, dans un terrein deux fois plus difficile à fouiller?

400×9 ont produit un effet qui est en raison directe de $1735 \times 9 \times 23$ et inverse de 54 jours; 780×10 ont produit un effet qui est en raison directe de $2843 \times 35 \times 15 \times 2$ et inverse du nombre de jours demandé. Nous aurons donc cette proportion $400 \times 9 : 780 \times 10 :: \frac{1735 \times 23 \times 9}{54} : \frac{2843 \times 35 \times 15 \times 2}{x}$; ou, divisant les deux premiers termes par le facteur commun 100, $36 : 78 :: \frac{359145}{54} : \frac{2985150}{x}$; d'où l'on tire, en faisant le produit des extrêmes égal au produit des moyens,

$$\frac{2985150}{x} = \frac{28013310}{1944}, \text{ et } x = \frac{298515 \times 1944}{2801331}.$$

Mais on auroit pu mettre le problême en proportion, sans faire aucune attention aux raisons inverses, et prendre pour les deux causes, $400 \times 9 \times 54$, $780 \times 10 \times x$; pour le premier effet $1735 \times 23 \times 9$, pour le second $2843 \times 35 \times 15 \times 2$, et on auroit eu la proportion $1944 : 78x :: 359145 : 2985150$, de laquelle on eût tiré $x = \frac{298515 \times 1944}{2801331} = 207,15$ à peu de choses près.

35. Nous avons déja remarqué qu'il n'existe de proportions ou d'équations qu'entre des quantités abstraites, qui sont les rapports des quantités concrètes énoncées dans le problême à leurs unités de convention. Or, comme toutes les questions doivent se réduire à des proportions ou à des équations, il n'y a d'opérations d'arithmétique qu'entre des quantités abstraites. Les opérations du toisé elles-mêmes ne sont que des multiplications de nombres abstraits ; car il est aisé de voir que, si c'est d'un rectangle qu'on demande la surface, il y a même rapport géométrique entre le rectangle et l'unité de surface, dont les deux dimensions sont égales chacune à l'unité linéaire, qu'entre le nombre abstrait qui naîtra de la multiplication du nombre d'unités linéaires de la base par le nombre d'unités linéaires de la hauteur, et l'unité abstraite ; que, si c'est d'un parallélipipède qu'on demande la solidité, il y a même rapport géométrique entre le parallélipipède et l'unité cube, dont les trois dimensions sont égales chacune à l'unité linéaire, qu'entre le nombre abstrait qui naîtra de la multiplication de ces trois nombres, le nombre d'unités linéaires de la longueur, le nombre d'unités linéaires de la largeur, le nombre d'unités linéaires de la hauteur, et l'unité abstraite.

36. On peut changer l'ordre des termes d'une proportion, sans que cette proportion cesse d'être la même, c'est-à-dire, de donner la même équation en faisant le produit des extrêmes égal au produit des moyens. Soit

la proportion $a : b :: m : n$, d'où l'on tire $an = bm$; on tirera aussi $an = bm$, en faisant le produit des extrêmes égal au produit des moyens dans les deux proportions $b : a :: n : m$, $a : m :: b : n$. Le premier changement se nomme invertendo, et le second alternando. On aura $an = bm$, en faisant le produit des extrêmes égal au produit des moyens dans les proportions $a + b : b :: m + n : n$, $a + b : a :: m + n : m$, $a + m : b + n :: a : b$, $a + m : b + n :: m : n$; car on en tire $an + bn = bm + bn$, $am + bm = am + an$, $ab + bm = ab + an$, $an + mn = bm + mn$, qui toutes se réduisent à $an = bm$. Chacun de ces changemens se nomme componendo. On aura encore le même résultat en faisant le produit des extrêmes égal au produit des moyens dans les proportions $a - b : b :: m - n : n$, $a - b : a :: m - n : m$, $a - m : b - n :: a : b$, $a - m : b - n :: m : n$; car on en tire $an - bn = bm - bn$, $am - bm = am - an$, $ab - bm = ab - an$, $an - mn = bm - mn$, qui toutes se réduisent à $an = bm$. Chacun de ces changemens se nomme dividendo.

37. On n'a pas trouvé de difficulté dans la multiplication de $a + b$ par n, et on a vu que le produit ne pouvoit être que $an + bn$; mais on n'a peut-être pas vu aussi aisément que le produit de $a - b$ par n dût être $an - bn$. Pour s'en assurer on fera $a - b = x$, d'où $a = b + x$. En multipliant les deux membres de cette équation par n, on en tire $an = bn + nx$; et, faisant passer bn dans le premier membre avec le signe —, $an - bn = nx$. Donc $an - bn$ est le produit de x par n ou de $a - b$ par n. Maintenant que nous nous sommes assurés qu'une quantité qui a le signe + étant multipliée par une quantité qui a le signe —, ou qu'une quantité qui a le signe — étant multipliée par une quantité qui a le signe +, doit donner un produit avec le signe —, nous pourrons

multiplier les deux membres de l'équation $a = b + x$ par $-n$, et nous aurons $-an = -bn - nx$, ou, faisant passer bn dans l'autre membre avec le signe $+$, $-an + bn = -nx = -n(a-b)$. Or de ce que $a - b$ multiplié par $-n$ donne au produit $-an + bn$, nous devons conclure que le produit de $-b$ par $-n$ est $+bn$; et de tout ce qui précède que si chacun des facteurs a le signe $+$ le produit doit avoir le signe $+$, que si chacun des facteurs a le signe $-$ le produit doit encore avoir le signe $+$; mais que si des deux facteurs l'un a le signe $+$, l'autre le signe $-$, le produit doit avoir le signe $-$; ce qu'on exprime d'une autre manière, en disant : le produit doit avoir le signe $+$, lorsque les deux facteurs ont le même signe; il doit avoir le signe $-$, lorsque les deux facteurs ont des signes différens.

38. Ayant deux proportions $a : b :: m : n$, $h : i :: p : q$, on en peut tirer $ah : bi :: mp : nq$; car celle-ci donne $ahnq = bimp$, ou $\frac{an}{bm} = \frac{ip}{hq}$, dans laquelle $\frac{an}{bm} = 1$, puisque $an = bm$, $\frac{ip}{nq} = 1$, puisque $ip = hq$; donc $\frac{an}{bm} = \frac{ip}{hq}$ indique que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens dans la proportion $ah : bi :: mp : nq$. Au lieu de deux proportions, si on en avoit un plus grand nombre, on obtiendroit encore une proportion géométrique en les multipliant toutes ensemble par ordre, c'est-à-dire, terme par terme correspondant. On en peut conclure que quand quatre grandeurs sont en proportion géométrique, toutes leurs puissances de même degré seront aussi en proportion géométrique; ce qui se démontre d'une autre manière que voici. Ayant $a : b :: m : n$, on en tire $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{m^2}{n^2}$, $\frac{a^3}{b^3} = \frac{m^3}{n^3}$ . . . . . $\frac{a^r}{b^r} = \frac{m^r}{n^r}$, et $a^2 : b^2 :: m^2 : n^2$, $a^3 : b^3 :: m^3 : n^3$ . . . . . $a^r : b^r :: m^r : n^r$.

39. Si on divise les quatre termes de cette proportion $a : b :: m : n$, par les quatre termes correspondans d'une autre proportion $h : i :: p : q$, ce qu'on appelle diviser par ordre, les quatre quotiens qui résulteront de ces divisions seront en proportion géométrique, c'est-à-dire qu'on aura $\frac{a}{h} : \frac{b}{i} :: \frac{m}{p} : \frac{n}{q}$; car on en tire $\frac{an}{hq} = \frac{bm}{ip}$ ou $\frac{an}{bm} = \frac{hq}{ip}$, dans laquelle $\frac{an}{bm} = 1$, $\frac{hq}{ip} = 1$. On en peut conclure que, si les puissances quelconques de quatre grandeurs sont en proportion géométrique, les racines de ces puissances sont aussi en proportion géométrique; et aussi que, si quatre grandeurs sont en proportion géométrique, les racines quelconques de ces grandeurs sont en proportion géométrique. On le démontrera différemment en tirant de

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{i}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{i}}, \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{i}}$$

$$\ldots\ldots \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \frac{\sqrt[r]{h}}{\sqrt[r]{i}},$$

lesquelles mises en proportion donnnent

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{h} : \sqrt{i}, \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} ::$$

$$\sqrt[3]{h} : \sqrt[3]{i} \ldots\ldots \sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{b} :: \sqrt[r]{h} : \sqrt{i}.$$

Des Progressions géométriques.

40. On appelle progression géométrique une suite de termes dont chacun contient également celui qui suit, ou est également contenu dans celui qui suit.

Le nombre entier ou fractionnaire, qui exprime combien de fois chaque terme d'une progression contient celui qui le suit ou celui qui le précède, se nomme raison de la progression. Si les termes d'une progression vont en augmentant, la progression est croissante; elle est décroissante lorsqu'ils vont en diminuant. Enfin, pour marquer que tous les termes d'une suite sont en progression géométrique, on met à la gauche du premier quatre points avec une barre horisontale qui sépare les deux points supérieurs des deux inférieurs, et l'on met deux points l'un sur l'autre après chaque terme de la progression. Des deux progressions géométriques

$$\dot{\dot{-}}\, 2 : 6 : 18 : 54 : 162 \ldots \quad \dot{\dot{-}}\, 162 : 54 : 18 : 6 : 2 \ldots$$

la première est croissante et la seconde décroissante : dans l'une et dans l'autre la raison de la progression est 3. Une progression géométrique qui n'a que trois termes, s'appelle proportion géométrique continue; ainsi

$$\dot{\dot{-}}\, 2 : 6 : 18, \quad \dot{\dot{-}}\, 18 : 54 : 162$$

sont des proportions géométriques continues, qu'on peut convertir en ces simples proportions :

$$2 : 6 :: 6 : 18, \quad 18 : 54 :: 54 : 162.$$

Donc, dans toute proportion géométrique continue, le quarré du terme moyen est égal au produit des deux extrêmes.

41. Toute progression géométrique peut être représentée par $\dot{\dot{-}}\, a : aq : aq^2 : aq^3 \ldots\ldots$ lorsqu'elle est croissante, ou par $\dot{\dot{-}}\, a : \frac{a}{q} : \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q^3} \ldots\ldots$ lorsqu'elle est décroissante. Le terme de la première, dont le numéro est $r + 1$ est aq^r; le même terme de la seconde est $\frac{a}{q^r}$: ainsi, la puissance r du premier

terme est à la puissance r du second, comme le premier terme est à celui dont le numéro est $r+1$; la différence des deux premiers termes est au premier, comme la différence du premier terme à un terme quelconque est à la somme des termes qui précèdent ce terme quelconque. La vérité de la seconde proposition ne se présente pas aussi évidemment que la vérité de la première. Mais ayant formé les deux proportions

$$a - aq : a :: a - aq^r : a + aq + aq^2 + \ldots\ldots + aq^{r-1},$$

$$a - \frac{a}{q} : a :: a - \frac{a}{q^r} : a + \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{a}{q^{r-1}},$$

on en tire, en faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens,

$$1 - q^r = (1 - q) \times (1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^{r-1}),$$

$$1 - \frac{1}{q^r} = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \times \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{q^{r-1}}\right);$$

on achevera les multiplications indiquées, et on aura

$$1 - q^r = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^{r-1} - q - q^2 - q^3 - \ldots\ldots - q^{r-1} - q^r,$$

$$1 - \frac{1}{q^r} = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{q^{r-1}} - \frac{1}{q} - \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} - \ldots\ldots - \frac{1}{q^{r-1}} - \frac{1}{q^r};$$

lesquelles,

lesquelles se réduisent à

$$1 - q^r = 1 - q^r,\ 1 - \frac{1}{q^r} = 1 - \frac{1}{q^r},$$

équations qui, étant identiques, nous font voir évidemment que la proportion indiquée est vraie.

42. Il suit de la proposition que nous venons de démontrer que

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots + aq^{r-1} = \frac{a - aq^r}{1 - q},$$

$$a + \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \frac{a}{q^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{a}{q^{r-1}} = \frac{a - \frac{a}{q^r}}{1 - \frac{1}{q}};$$

ce qui nous donne le moyen de trouver la somme d'un nombre quelconque de termes d'une progression géométrique croissante ou décroissante. Pour trouver la somme des cinq termes $\div$ 2 : 6 : 18 : 54 : 162, il faudra faire $a = 2$, $q = 3$, $r = 5$ dans $\frac{a - aq^r}{1 - q}$, ou $a = 162$, $q = 3$, $r = 5$ dans $\frac{a - \frac{a}{q^r}}{1 - \frac{1}{q}}$, et on aura de l'une et l'autre manière 242 pour la somme demandée.

Des Progressions arithmétiques.

43. On appelle progression arithmétique une suite de termes qui croissent ou qui décroissent tous également ; dans le premier cas la progression arithmétique est nommée croissante, et décroissante dans le second

cas. Pour indiquer une progression arithmétique, on place à la gauche du premier terme deux points l'un sur l'autre avec une barre horisontale entre deux, et l'on met un point après chaque terme de la progression : ainsi $\div 2.7.12.17.22.27\ldots$ est une progression arithmétique croissante, et $\div 27.22.17.12.7.2\ldots$ une progression arithmétique décroissante. La quantité constante dont les termes d'une progression arithmétique croissent ou décroissent s'appelle raison ou différence de la progression ; dans l'exemple précédent 5 est la différence : cette différence est additive lorsque la progression est croissante, et soustractive lorsqu'elle est décroissante.

44. Toute progression arithmétique peut être représentée par

$$\div a.a \pm d.a \pm 2d.a \pm 3d \ldots\ldots a \pm nd,$$

le signe + étant pour la progression croissante et le signe — pour la progression décroissante. Si on écrit cette même progression en commençant par le dernier terme, on aura

$$\div a \pm nd.a \pm nd \mp d.a \pm nd \mp 2d.$$
$$a \pm nd \mp 3d \ldots\ldots a.$$

Or, le premier terme de la première ajouté au premier terme de la seconde, donne $2a \pm nd$; le second terme de la première ajouté au second terme de la seconde donne $a \pm d + a \pm nd \mp d = 2a \pm nd$; le troisième terme ajouté au troisième, donne $a \pm 2d + a \pm nd \mp 2d = 2a \pm nd$; le quatrième ajouté au quatrième, donne $a \pm 3d + a \pm nd \mp 3d = 2a \pm nd$, etc. ; donc la somme de tous les termes des deux progressions arithmétiques, ou le double de la somme de tous les termes d'une seule de ces progressions est égal à $2a \pm nd$, qui est la somme des extrêmes, multipliée par le nombre des termes. Donc si l'on

nomme s la somme de tous les termes d'une progression arithmétique croissante ou décroissante, a le premier terme, d la différence, n le nombre des termes, on aura $s = \frac{2a \pm (n-1)d}{2} \times n$, le signe $+$ étant pour la progression croissante et le signe $-$ pour la progression décroissante. Pour trouver la somme des six termes de la progression $\div$ 2 . 7 . 12 . 17 . 22 . 27, on fera $a = 2$, $d = 5$, $n = 6$ dans la formule $\frac{2a + (n-1)d}{2} \times n$, ou $a = 27$, $d = 5$, $n = 6$ dans la formule $\frac{2a - (n-1)d}{2} \times n$, et on aura de l'une et l'autre manière $s = 87$.

Des Logarithmes.

45. Imaginez que tous les nombres possibles soient compris dans une même progression géométrique dont un des termes soit l'unité, la distance d'un terme quelconque à l'unité est ce qu'on appelle le logarithme de ce terme. Ainsi, dans la progression géométrique $\div$ $1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : q^5 \ldots$ l'exposant de chaque terme, exprimant sa distance à l'unité, est le logarithme de ce terme; 0 est le logarithme de 1, 1 l'est de q, 2 l'est de q^2, 3 l'est de q^3, et ainsi des autres. Ayant divisé les intervalles entre 1 et q, entre q et q^2, entre q^2 et q^3, etc., en un certain nombre de parties égales, en quatre parties égales, par exemple, on intercalera entre 1 et q des termes $q^{\frac{1}{4}} : q^{\frac{1}{2}} : q^{\frac{3}{4}}$, qui auront pour logarithmes $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$; entre q et q^2 des termes $q^{\frac{1}{4}} : q^{\frac{3}{2}} : q^{\frac{7}{4}}$ qui auront pour logarithmes $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, etc. Mais dans la construction des tables de logarithmes, il faut convenir

des termes de la progression géométrique dont les distances à l'unité seront 1, 2, 3, 4, 5, etc.; ces termes, dans les tables ordinaires, sont ceux de la progression géométrique décuple ÷ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000..... Ainsi communément 1 est le logarithme de 10, 2 l'est de 100, 3 de 1000, 4 de 10000, etc. Dans cette progression géométrique décuple, le terme du milieu entre 1 et 10, qui a pour logarithme $\frac{1}{2}$ ou 0,5, est la racine quarrée de 10, qu'on ne peut trouver que par approximation. La distance à l'unité du nombre entier 3, que cette racine quarrée renferme, est moindre que 0,5 : on ne peut aussi la trouver que par approximation. Si on divise en trois parties l'intervalle entre 1 et 10, le nombre qui aura pour logarithme $\frac{1}{3}$ sera la racine cube de 10, qu'on ne peut trouver que par approximation. Le nombre entier 2, qui entre dans cette racine cube, aura pour logarithme une fraction moindre que $\frac{1}{3}$; elle ne diffère pas d'un dix-millième de 0,301.

Cela suffit pour faire comprendre que la recherche des logarithmes des nombres est un problême d'approximation sur lequel, pour le moment, nous n'entrerons pas dans un plus grand détail.

46. De part et d'autre de l'unité, imaginons deux progressions géométriques, l'une croissante, l'autre décroissante, que nous représenterons par

$$\text{etc. } \frac{1}{q^4} : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : q^3 : q^4, \text{ etc.}$$

La distance à l'unité du premier terme à gauche est 1, comme celle du premier terme à droite; la distance du 2e terme à gauche est 2, comme celle du 2e terme à droite, et ainsi des autres : mais pour ne pas confondre ces distances, si nous prenons positivement celles à droite, nous prendrons négativement celles à gauche; en sorte que les logarithmes de

q, q^2, q^3, q^4, etc., étant $+1, +2, +3, +4$, etc., ceux de $\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}, \frac{1}{q^4}$, etc. ou de $q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, q^{-4}$, etc., seront $-1, -2, -3, -4$, etc. Nous ferons dans la suite le plus grand usage de cette manière de distinguer les distances dans un sens de celles en sens contraire, en affectant les unes du signe $+$, et les autres du signe $-$. Quoi qu'il en soit, nous conviendrons d'écrire, pour abréger, log. au lieu de logarithme; c'est-à-dire que log. q signifiera dans la suite absolument la même chose que logarithme q.

47. Puisqu'on a toujours $r = \log. q^r$, quelque soit r; si l'on fait $R = q^r$, on en tirera $r = \log. R$ et $R = q^{\log. R}$. Pour un autre nombre s, ayant $s = \log. q^s$, si l'on fait $S = q^s$, on aura aussi $S = q^{\log. S}$. Donc $RS = q^{\log. R + \log. S}$, et par conséquent $\log. RS = \log. R + \log. S$. Ayant donc les logarithmes de deux nombres, il suffira de les ajouter ensemble pour avoir le logarithme du produit. On aura de même $\frac{R}{S} = q^{\log. R - \log. S}$, et $\log. \frac{R}{S} = \log. R - \log. S$; c'est-à-dire qu'on trouvera le logarithme d'une fraction, en ôtant le logarithme du dénominateur du logarithme du numérateur.

Faisons $S = R$ dans l'équation $\log. RS = \log. R + \log. S$, et nous aurons $\log. R^2 = 2 \log. R$. Dans la même équation, faisons $S = R^2$, et nous aurons $\log. R^3 = \log. R + \log. R^2 = 3 \log. R$; nous trouverons de la même manière $\log. R^4 = 4 \log. R$, $\log. R^5 = 5 \log. R$, etc. Donc, en faisant usage des logarithmes, l'élévation d'un nombre au quarré, au cube, ou à d'autres puissances dont les exposans soient des nombres entiers positifs, se réduit à une simple multiplication par 2, par 3 ou par un autre nombre entier

positif ; réciproquement l'extraction des racines quarrées, cubiques, etc., se réduit à une simple division par 2, par 3, ou par un autre nombre entier positif.

Puisque n étant un nombre entier positif, on a $\log. R^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log. R$; en prenant un autre nombre entier positif m, on aura aussi $\log. \left(R^{\frac{1}{n}}\right)^m = m \log. R^{\frac{1}{n}} = \frac{m}{n} \log. R$. Mais $\left(R^{\frac{1}{n}}\right)^m = R^{\frac{m}{n}}$; donc $\log. R^{\frac{m}{n}} = \log. \sqrt[n]{R^m} = \frac{m}{n} \log. R$.

En supposant $R = \frac{1}{S}$, on changera la formule précédente en celle ci : $\log \left(\frac{1}{S}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} \log. \frac{1}{S}$, qui n'est autre que $\log. S^{-\frac{m}{n}} = -\frac{m}{n} \log. S$.

Nous pouvons donc conclure généralement que quelque soit n, $\log. R^n = n \log. R$.

48. Nous allons faire quelques applications des théories que nous venons d'exposer, et nous demanderons d'abord de trouver le nombre des termes d'une progression géométrique dont on connoît le premier terme, la raison et la somme de tous les termes. Si cette progression est croissante, on aura l'équation $S = a \times \frac{1-q^r}{1-q}$, ou $S \times \frac{1-q}{a} = 1 - q^r$, ou $q^r = 1 - S \times \frac{1-q}{a}$, équation de laquelle on ne peut tirer r qu'au moyen des logarithmes. Or, $\log. q^r = r \log. q$; et, comme le logarithme du premier membre de l'équation doit être égal au logarithme du second, on doit avoir

$r \log. q = \log. \left(1 - S \times \frac{1-q}{a}\right)$, d'où

$$r = \frac{\log. \left(1 - S \times \frac{1-q}{a}\right)}{\log. q}.$$

Si $a = 1$, $q = 10$, $S = 111111$; on aura $\log. q = 1$, $1 - S \times \frac{1-q}{a} = 1 + 999999 = 1000000$, et par conséquent $r = \log. (1000000)$. Mais dans les tables ordinaires ce logarithme est 6; donc 111111 est la somme des six premiers termes de la progression décuple croissante. Lorsque la progression est décroissante, on a $r = \frac{\log. \left(1 - S \times \frac{1-\frac{1}{q}}{a}\right)}{-\log. q}$; et si, prenant pour exemple la progression décuple décroissante, on demande le nombre de termes dont la somme est 1,111111, on fera dans la formule précédente $a = 1$, $q = 10$, $S = 1,111111$. On aura $S \times \left(1 - \frac{1}{q}\right) = 1,111111 \times \frac{9}{10} = 0,999999$, et $1 - S \times \left(1 - \frac{1}{q}\right) = 0,0000001$, qui a pour logarithme -6; donc $r = \frac{-6}{-1} = 6$.

49. Proposons-nous aussi de trouver le nombre de termes d'une progression arithmétique dont on connoît le premier terme, la différence et la somme. Si cette progression est croissante, on a $2S = (2a + (n-1)d)n$, ou $2S = 2an + n^2 - dn$, à laquelle on peut donner cette forme $n^2 + (2a - d)n = 2S$. Lorsque la progression est décroissante, on a $2S = 2an - n^2 + dn$, qui devient $n^2 - 2an - dn = -2S$, ou $n^2 - (2a + d)n = -2S$. Voilà un genre

d'équation où l'inconnue est élevée à la seconde puissance, et que nous n'avons pas encore eu occassion de rencontrer.

Résolution des Équations du second dégré.

50. Avant de les résoudre généralement, nous nous proposerons le cas le plus simple, l'équation $x^2 = a^2$, qu'on peut mettre sous cette autre forme $x^2 - a^2 = 0$. Nous avons vu que $x^2 - a^2$ est le produit de $x + a$ par $x - a$; donc $(x + a) \times (x - a) = 0$; ce qui peut avoir lieu de deux manières, ou parce que $x + a = 0$, ou parce que $x - a = 0$; et, comme rien n'indique laquelle des deux on doit préférer, on dira que $x^2 = a^2$ a deux solutions $x = a$ et $x = -a$: ces deux solutions se nomment les racines de l'équation. Lorsque le second membre n'est point un quarré parfait comme dans $x^2 = b$, on se contente d'en indiquer la racine, et on écrit $x = \sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$; ou, ce qui est équivalent, $x = \pm\sqrt{b}$. Si b avoit le signe —, comme dans $x^2 = -b$, on auroit $x = \pm\sqrt{-b}$.

51. Nous avons vu que $+a \times +a$ et $-a \times -a$ donnent également au produit a^2; il n'y a donc pas de quantité réelle qui, étant multipliée par elle-même, puisse produire $-a^2$, et $\sqrt{-a^2}$ ne peut être qu'une quantité imaginaire. Ainsi l'équation $x^2 = -a^2$, de laquelle je ne puis tirer que $x = \pm\sqrt{-a^2}$, a ses deux racines imaginaires; c'est-à-dire, qu'il n'y a pas de question soluble qui puisse conduire à un tel résultat. Quelquefois cependant ce résultat ne fait qu'indiquer que la méthode employée pour résoudre le problême n'est pas celle qu'on devoit suivre. De $x^2 = -a^2$, on tire $\frac{x^2}{a^2} = -1$, $\frac{x}{a} = \pm\sqrt{-1}$ et $x = \pm a\sqrt{-1}$; le plus souvent je représenterai de cette manière les

racines imaginaires. En outre $x^2 + a^2$ doit avoir pour facteurs $x + a\sqrt{-1}$ et $x - a\sqrt{-1}$; en effet $x + a\sqrt{-1}$ par x, donne au produit $x^2 + ax\sqrt{-1}$, en multipliant ensuite $x + a\sqrt{-1}$ par $-a\sqrt{-1}$, on trouve $-ax\sqrt{-1} - a^2 \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$; donc $(x + a\sqrt{-1}) \times (x - a\sqrt{-1}) = x^2 + ax\sqrt{-1} - ax\sqrt{-1} - a^2 \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = x^2 - a^2 \times \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$, et il ne s'agit plus que de multiplier $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-1}$, lequel produit ne peut être que $\sqrt{(-1)^2}$ ou -1. Généralemenr $\sqrt{-b} \times \sqrt{-b}$ ne peut être que $\sqrt{(-b)^2}$ ou $-b$. On objectera que $(-b)^2$ n'est autre chose que b^2, et que b^2 n'a pas pour racine $-b$ plutôt que $+b$; cela est vrai lorsque rien n'indique laquelle des deux on doit choisir ; mais dans le cas dont il s'agit, la racine $-b$ est indiquée par la nature du problême. Enfin les racines $x = \pm\sqrt{-b}$ sont imaginaires lorsque b est une quantité positive, et alors on pourra les représenter par $x = \pm\sqrt{b}\sqrt{-1}$.

52. Maintenant proposons-nous de résoudre l'équation plus générale $x^2 + px + q = 0$, ou de trouver les facteurs du trinome $x^2 + px + q$. On fera passer q dans le second membre avec un signe contraire et on aura $x^2 + px = -q$. Cela posé, si, ajoutant de part et d'autre l'indéterminée h, le premier membre devenoit le quarré de quelque quantité, telle que $x + i$, on auroit $(x + i)^2 = -q + h$, d'où l'on tireroit $x + i = \pm\sqrt{-q+h}$, et le problême seroit résolu. Mais le quarré de $x + i$ est le produit de $x + i$ par $x + i$, ou le produit de $x + i$ par x, qui est $x^2 + ix$, plus le produit de $x + i$ par i, qui est $ix + i^2$; c'est-à-dire que $(x + i)^2 = x^2 + 2ix + i^2$, laquelle quantité doit être identiquement la même chose que $x^2 + px + h$. En les comparant on en tire $2i = p$, $i^2 = h$, et par conséquent $i = \frac{p}{2}$, $h = \frac{p^2}{4}$;

donc $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}}$ et

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}}.$$

Le problême est résolu, et la solution est réelle toutes les fois que $-q+\frac{p^2}{4}$ est une quantité positive, ou toutes les fois que, q étant positif, $\frac{p^2}{4}$ est plus grand que q. Si, dans le cas de q positif, $\frac{p^2}{4}$ étoit moindre que q, les deux racines seroient imaginaires. Alors en faisant $-q+\frac{p^2}{4}=-r$, on pourroit les représenter par $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{r}\sqrt{-1}$.

Les deux facteurs du trinome x^2+px+q, sont

$$x+\frac{p}{2}+\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}} \text{ et } x+\frac{p}{2}-\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}};$$

en les multipliant l'un par l'autre, on trouve

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}}-\left(x+\frac{p}{2}\right)\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}}-\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}}\sqrt{-q+\frac{p^2}{4}}$$

$$=x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=x^2+px+q.$$

Lorsque ces deux facteurs sont imaginaires, si l'un est représenté par $x+\frac{p}{2}+R\sqrt{-1}$, l'autre doit l'être par $x+\frac{p}{2}-R\sqrt{-1}$.

53. Revenons aux progressions arithmétiques. On

demande le nombre de termes d'une progression arithmétique croissante, dont le premier est 1, la différence 1, et la somme de tous les termes 28. On fera $a = 1$, $d = 1$, $2a - d = 1$, $2S = 56$ dans l'équation $n^2 + (2a - d)n = 2S$, qui deviendra, par cette substitution, $n^2 + n = 56$. En comparant celle-ci avec l'équation générale $x^2 + px + q = 0$, on trouve $x = n$, $p = 1$, $-q = 56$; et par conséquent $n = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{56 + \frac{1}{4}}$. Mais $56 + \frac{1}{4} = \frac{225}{4}$, dont la racine quarrée est $\frac{15}{2}$; donc $n = -\frac{1}{2} + \frac{15}{2}$. On a donc ces deux valeurs de n, $n = -\frac{1}{2} + \frac{15}{2} = 7$, $n = -\frac{1}{2} - \frac{15}{2} = -8$, dont la première seule doit être admise, puisqu'un nombre de termes est nécessairement positif.

54. On propose de trouver deux nombres, dont l'un surpasse l'autre de 7, et dont le produit soit 60. En nommant ces deux nombres x et y, on a les deux équations $y - x = 7$, $yx = 60$. On tire de la première, $y = x + 7$, $yx = x^2 + 7x$. On a donc cette équation, $x^2 + 7x = 60$. On la comparera à l'équation génétale, et on aura $p = 7$, $q = -60$, $-q + \frac{p^2}{4} = 60 + \frac{49}{4} = \frac{289}{4}$, dont la racine quarrée est $\frac{17}{2}$. Donc $x = -\frac{7}{2} \pm \frac{17}{2}$, et par conséquent x a deux valeurs, $x = 5$ et $x = -12$. En prenant d'abord $x = 5$, il vient $y = 12$; et il est clair que les deux nombres 5 et 12 satisfont à la question. Si l'on prend ensuite $x = -12$, on aura $y = -5$, lesquels deux nombres négatifs satisfont encore à la question; car, ôtant -12 de -5, on a $+12 - 5 = 7$; on a aussi $-12 \times -5 = 60$. La réponse à la question est donc que les deux nombres 5 et 12 y satisfont, soit qu'on les prenne positivement ou qu'on les prenne négativement.

Trouver un nombre avec cette condition, que, si à son quarré on ajoute 8, la somme soit le triple de

ce nombre. L'équation à résoudre est $x^2 + 8 = 3x$, ou $x^2 - 3x = -8$. On fera dans l'équation générale, $p = -3$, $q = 8$, et on aura $-q + \frac{p^2}{4} = -8 + \frac{9}{4} = -\frac{23}{4}$, $x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{-23}}{2}$. Mais la racine quarrée de -23 est une quantité imaginaire $\sqrt{23}\sqrt{-1}$; ainsi on doit répondre à la question dont il s'agit, qu'il n'y a pas de nombre réel qui puisse y satisfaire.

Règle de Compagnie.

55. Trois marchands mettent en société chacun une certaine somme. Le premier met 17000 francs, le second 13000, et le troisième 10000. Le troisième se charge de conduire toute l'affaire, à condition de tirer de plus que les autres trois pour cent de tout le gain qui se fera. Ce gain monte à 100000 francs; on demande quelle doit être la part de chacun. Les trois pour cent de 100000 liv. sont 3000 liv., qu'il faut ôter de ce gain total; et il restera 97000 liv. à partager entre les trois marchands, proportionnellement à la mise de chacun. Pour y parvenir, on fera une somme de toutes les mises, laquelle est 40000 liv. On établira ensuite les proportions suivantes :

40000 : 97000, ou 40 : 97

:: 17000 : à la part du 1er = 41225.

:: 13000 : à la part du 2e = 31525.

:: 10000 : à la part du 3e = 24250.

A la part du 3e, dans les 97000 liv., il faut ajouter 3000 liv. pour avoir tout le gain qu'il a fait. On peut résoudre cette question, du genre de celles que les arithméticiens nomment règles de compagnie, d'une autre manière que voici.

On nommera x la part du premier ; et il sera facile de voir que la part du premier dans les ,97000, est à celle du second :: 17 : 13 ; que la part du premier est à celle du troisième :: 17 : 10. Ainsi x étant le gain du premier, celui du second est $\frac{13x}{17}$, et celui du troisième $\frac{10x}{17} + 3000$. On aura donc l'équation $x + \frac{13x}{17} + \frac{10x}{17} + 3000 = 100000$, de laquelle on tire $\frac{40x}{17} = 97000.$, $x = 41225$, etc.

Calculs d'intérêts.

56. Une somme a a été placée au denier h, c'est-à-dire, à $\frac{100}{h}$ pour 100 ; si elle avoit été placée au denier 20, ce seroit à 5 pour 100 ; au denier $16\frac{2}{3}$, ce seroit à 6 pour 100 ; au denier 10, ce seroit à 10 pour 100, et ainsi des autres : une somme, dis-je, a été placée au denier h, et on est convenu de ne rien dépenser annuellement pour laisser croître successivement le capital. Au bout de la première année, ce capital est devenu $a + \frac{a}{h} = a \cdot \frac{h+1}{h}$. Au bout de la 2e année, $a \cdot \frac{h+1}{h}$, croissant de $a \cdot \frac{h+1}{h^2}$, est devenu $a\left(\frac{h+1}{h}\right)^2$; au bout de la 3e année $a\left(\frac{h+1}{h}\right)^2$, croissant de $\frac{a}{h}\left(\frac{h+1}{h}\right)^2$, est devenu $a\left(\frac{h+1}{h}\right)^3$, etc. Ainsi les accroissemens successifs et annuels ont formé la progression géométrique $\div\div a : a\frac{h+1}{h} : a\left(\frac{h+1}{h}\right)^2 : a\left(\frac{h+1}{h}\right)^3 : a\left(\frac{h+1}{h}\right)^4 \ldots$. et après n années le capital a été $a\left(\frac{h+1}{h}\right)^n$.

De cette manière, l'intérêt étant 5 pour 100, un capital de 1000 francs deviendroit au bout de quatre ans $1000\left(\frac{21}{20}\right)^4$. Ce calcul à effectuer seroit d'autant plus pénible, que le nombre d'années seroit plus considérable; mais on l'abrège beaucoup en faisant usage des logarithmes. En effet, $\log.\left(\frac{21}{20}\right)^4 = 4\log.\left(\frac{21}{20}\right) = 4(\log. 21 - \log. 20)$; donc $\log. 1000\left(\frac{21}{20}\right)^4 = \log. 1000 + 4(\log. 21 - \log. 20)$. On trouvera dans les tables $\log. 21 = 1{,}3222193$, $\log. 20 = 1{,}3010300$, $4(\log. 21 - \log. 20) = 0{,}0847572$, $\log. 1000 = 3$; donc le nombre demandé a pour logarithme 3,0847572. En cherchant ce nombre dans les tables, on trouve 1215,5.

En supposant l'intérêt à 6 pour 100, le même capital deviendroit au bout de quatre ans $1000\left(\frac{53}{50}\right)^4$. Or, $\log. 1000\left(\frac{53}{50}\right)^4 = \log. 1000 + 4(\log. 53 - \log. 50)$; il faut donc chercher dans les tables

$$\log. 53 = 1{,}7242759,\quad \log. 50 = 1{,}6989700,$$
$$4(\log. 53 - \log. 50) = 0{,}1012236,$$
$$\log. 1000 = 3;$$

et l'on trouvera 1262,47 pour la valeur du capital à la fin de la 4e année.

57. Sur ce capital placé au denier h, on a dépensé annuellement une somme i, et il n'étoit plus

après un an que $a\left(\frac{h+1}{h}\right) - i$,

après 2 ans que $a\left(\frac{h+1}{h}\right)^2 - i\left(\frac{h+1}{h}\right) - i$,

après 3 ans que $a\left(\frac{h+1}{h}\right)^3 - i\left(\frac{h+1}{h}\right)^2 - i\left(\frac{h+1}{h}\right) - i$, ...

après n ans que $a\left(\frac{h+1}{h}\right)^n - i\left[\left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-1} + \left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-2} + \left(\frac{h+1}{h}\right)^{n-3} + \ldots + 1\right]$.

Dans cette valeur du capital après n années, i est multiplié par une progression géométrique croissante, dont le premier terme est 1, la raison $\frac{h+1}{h}$, et le nombre des termes n. Cette progression a pour somme,

$$\frac{1 - \left(\frac{h+1}{h}\right)^n}{1 - \frac{h+1}{h}} = -h\left(1 - \left(\frac{h+1}{h}\right)^n\right).$$

Donc, aprés n années, le capital sera

$$a\left(\frac{h+1}{h}\right)^n + hi\left(1 - \left(\frac{h+1}{h}\right)^n\right), \text{ ou}$$

$$\left(\frac{h+1}{h}\right)^n (a - hi) + hi.$$

58. Lorsque la dépense annuelle excède l'intérêt de l'argent, on peut demander en combien de temps le capital qui va toujours en diminuant s'évanouira. Pour répondre à la question, on fera

$\left(\frac{h+1}{h}\right)^n (a - hi) + hi = 0$, d'où l'on tirera

$\left(\frac{h+1}{h}\right)^n = \frac{hi}{hi - a}$, et $n = \frac{\log. \frac{hi}{hi-a}}{\log.(h+1) - \log. h}$.

Si le capital est 100000 francs placés à 5 pour 100, et la dépense annuelle de 6000 liv., on a $h = 20$, $i = 6000$, $a = 100000$, $hi = 120000$, $hi - a = 20000$, $\frac{hi}{hi-a} = 6$; et, à cause de log. $6 =$

0,7781513, log. 21 — log. 20 = 0,0211893, on a $n = \frac{7781513}{211893} = 36$ ans 8 mois 22 jours.

59. Un courier est parti à une certaine heure et fait i lieues par heure. D'un autre lieu, qui est à la distance a lieues du premier, et h heures après, on envoie un second courier après lui ou audevant de lui, qui fait m lieues par heure. On demande où le second courier rencontrera le premier.

On nommera x le chemin que fera le second courier avant de rencontrer le premier. Cela posé, dans les h heures, le premier courier, qui fait i lieues par heure, a fait hi lieues ; et puisque la vîtesse avec laquelle il marche est à celle du second courier, qui fait m lieues par heure, comme i est à m, on formera cette proportion, $m : i :: x : \frac{ix}{m}$, dont le quatrième terme est le chemin que fera le premier courier, tandis que le second fera x. Donc le premier courier, avant de rencontrer le second, doit faire $hi + \frac{ix}{m}$ lieues. Si les deux couriers vont dans le même sens, et que le second soit plus près du point de rencontre que le premier, on aura $a + x = hi + \frac{ix}{m}$; s'il en est plus éloigné, on aura $x - a = hi + \frac{ix}{m}$. Si les deux couriers, pour se rencontrer, vont en sens contraire, on aura $a = x + hi + \frac{ix}{m}$.

De cette dernière formule on tire $x = \frac{m(a - hi)}{i + m}$, et que, quelles que soient les vîtesses, les deux couriers doivent se rencontrer. On tire des deux autres $x = \frac{m(hi \mp a)}{m - i}$, où l'on voit que les deux couriers

qui

qui vont dans le même sens ne se rencontreront pas si les deux vîtesses sont égales.

Notions sur Zéro et l'Infini.

60. L'impossibilité de se rencontrer nous est indiquée par la formule même qui, dans ce cas, a pour dénominateur zéro. Cela nous conduit naturellement à demander ce que signifie une expression qui a pour dénominateur zéro, ce que signifie zéro lui-même.

Tout rapport peut être représenté par $\frac{1}{q}$; il ne deviendra moindre ou plus grand, que parce que son dénominateur q augmentera ou diminuera. Quelle que soit l'augmentation de q, jamais le rapport ne deviendra nul; donc zéro n'est pas un rapport : il est la limite dont les rapports qui diminuent peuvent approcher continuellement sans jamais se confondre avec lui.

Jamais $\frac{1}{q}$ ne deviendra nul; donc jamais $1 : \frac{1}{q}$ ne deviendra $\frac{1}{0}$, quelle que soit l'augmentation de q. Donc de quelque accroissement que soit susceptible une quantité, elle ne deviendra jamais $\frac{1}{0}$. Donc $\frac{1}{0}$ est la limite de laquelle toute quantité susceptible d'augmentation sans fin peut approcher continuellement sans jamais se confondre avec elle. Ainsi $\frac{1}{0}$ étant l'expression de l'infini, la seule idée que nous puissions nous en former, c'est qu'il est la limite dont les quantités susceptibles d'augmentation sans fin peuvent approcher sans jamais se confondre avec lui.

Appliquons cela au problème précédent. La valeur de x ayant pour dénominateur 0, il en résulte que, quelque chemin que fassent les deux couriers, s'ils vont dans le même sens avec la même vîtesse, jamais celui qui est parti plus tard n'attrapera l'autre; ce qui d'ailleurs est évident.

61. Supposons deux rapports, p et q, liés entre eux de manière que l'un ne puisse augmenter ou diminuer sans que l'autre augmente ou diminue ; la limite dont $\frac{p}{q}$ approchera dans les deux cas, où p et q approcheront de 0 ou de $\frac{1}{0}$, sera représentée par $\frac{0}{0}$. Il y a donc des limites qui ne sont ni zéro ni l'infini, qui sont des quantités, et ces limites sont représentées généralement par $\frac{0}{0}$. Par exemple, la somme à l'infini des termes de la série des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5..... est l'infini même. Mais une autre série peut avoir pour somme à l'infini une quantité finie. Telle est celle-ci : $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}$..... qu'on trouve en faisant x successivement, 0, 1, 2, 3, 5..... dans $\frac{2}{(x+1)(x+2)}$. La somme d'un nombre x de termes de cette série est $2 - \frac{2}{x+1}$; si l'on demande cette somme à l'infini, il faudra faire $x = \frac{1}{0}$ dans la formule précédente, qui devient alors $2 - \frac{2}{\frac{1}{0}+1} = 2 - \frac{2 \times 0}{1+0} = 2$. Donc la série dont il s'agit a pour somme à l'infini le nombre 2. Aussi plus on prendra de termes de cette série, plus la somme de ces termes approchera d'être égale à 2 ; ce qu'il est facile de vérifier. En effet $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} + \frac{1}{10} = \frac{8}{5}$, $\frac{8}{5} + \frac{1}{15} = \frac{5}{3}$, $\frac{5}{3} + \frac{1}{21} = \frac{12}{7}$ ..... où l'on voit que $\frac{3}{2}$ diffère moins de 2 que $\frac{4}{3}$, $\frac{8}{5}$ moins que $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ moins que $\frac{8}{5}$, $\frac{12}{7}$ moins que $\frac{5}{3}$, etc ; plus on prendra de termes, plus la somme approchera d'être égale à 2, mais jamais elle ne sera 2.

62. Plus on s'éloigne d'un corps lumineux, moins on en est éclairé, et cette diminution de lumière suit la raison directe du quarré de la distance au corps lumineux. En effet on peut regarder les rayons qui en partent comme formant un cône indéfini, dont il est le

sommet; et il est démontré en géométrie que si l'on coupe un cône par des plans parallèles à sa base, les surfaces de ces plans, qui sont des cercles semblables à celui de la base, seront entr'elles comme les quarrés de leurs distances au sommet. Or ces plans ne reçoivent que la quantité de lumière partie du corps lumineux; elle a donc moins de densité sur celui qui est plus éloigné et qui a plus de surface, que sur celui qui est plus près; et cette diminution suit la raison directe du quarré de la distance au corps lumineux. Ainsi l'intensité de la lumière à une distance prise pour l'unité étant m, à une distance trois fois plus grande elle sera $\frac{m}{9}$, à une distance quatre fois plus grande elle sera $\frac{m}{16}$, à une distance x elle sera $\frac{m}{x^2}$.

63. Imaginez deux lumières A et B, situées à une distance a l'une de l'autre, et sur la ligne qui les joint un point où l'on suppose qu'elles éclairent également. Si l'on nomme x la distance de la lumière A à ce point, la distance de la lumière B au même point sera $a - x$; et si, à une distance prise pour l'unité, l'intensité de l'une est m et l'intensité de l'autre n, l'intensité de la première ou de A, à la distance x sera $\frac{m}{x^2}$; l'intensité de B, à la distance $a - x$ sera $\frac{n}{(a-x)^2}$. Mais par l'hypothèse le point dont il s'agit doit être éclairé également par ces deux lumières; on aura donc $\frac{m}{x^2} = \frac{n}{(a-x)^2}$, ou $m(a-x)^2 = nx^2$, ou même encore $ma^2 - 2max + mx^2 = nx^2$. Pour comparer cette équation à l'équation générale du second dégré $x^2 + px + q = 0$ (n°. 52), je lui donne la forme suivante:

$x^2 + \frac{m}{n-m} 2ax = \frac{m}{n-m} a^2$, où $\frac{m}{n-m} 2a = p$,

$\frac{m}{n-m}a^2 = -q$. Donc $-q+\frac{p^2}{4} = \frac{m\,a^2}{n-m}\left(1+\frac{m}{n-m}\right)$ $= \frac{mn}{(m-n)^2}\,a^2$, et $x = \frac{a}{n-m}\,(-m \pm \sqrt{mn})$.

64. Si $n = m$, il n'y a qu'une seule racine, qui se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais en remontant à l'équation du second degré, qui devient alors $2x = a$, on voit qu'effectivement x n'a qu'une seule valeur $\frac{a}{2}$; ce qui nous apprend que lorsque les deux lumières sont égales, le point où elles éclairent également doit être placé au milieu de la droite qui les joint. Si n est plus grand que m, il y a deux valeurs de x, dont une est nécessairement négative. Lorsque x est négatif, le point où les deux lumières éclairent également doit être au-delà de A, origine des x; car la différence des signes ne peut nous apprendre autre chose, sinon que les deux valeurs de x sont en sens contraires. Supposons l'intensité de B quadruple de celle de A, ou $n = 4m$, on aura $x = \frac{a}{3}\,(-1 \pm 2)$; c'est-à-dire, que sur la ligne BA, prolongée au-delà du point A, il y a deux points, l'un vers B à la distance $\frac{a}{3}$ de A, l'autre en sens contraire à la distance a de A, où les deux lumières éclairent également.

L'idée de se servir des signes + et − pour indiquer les valeurs d'une même quantité dans des sens différens, est d'une très-grande fécondité (n°. 46), comme nous le verrons sur-tout dans l'application de l'algèbre à la géométrie.

SECONDE PARTIE.

Nous nous sommes principalement attachés, dans la première partie, à développer les principes sur lesquels l'Algèbre est fondée, et à faire voir l'usage des signes. Dans celle-ci, nous nous occuperons davantage de calculs, et nous tâcherons de donner aux méthodes toute la simplicité dont elles sont susceptibles.

De l'Addition et de la Soustraction.

65. Pour ajouter des quantités quelconques, je commence par les écrire de suite, après quoi je fais la réduction. Ainsi, pour ajouter $3ab^2 - 6abc + 5ac^2$, $4ab^2 + 3abc + 7ac^2$, $-9ab^2 + 7abc - 3ac^2$, je les écris de suite, ou les unes sous les autres, de manière que les quantités pareilles soient dans la même colonne verticale; je fais ensuite la réduction :

$$\begin{array}{r} 3ab^2 - 6abc + 5ac^2 \\ 4ab^2 + 3abc + 7ac^2 \\ -9ab^2 + 7abc - 3ac^2 \\ \hline -2ab^2 + 4abc + 9ac^2 \end{array}$$

Or, $3ab^2 + 4ab^2 - 9ab^2 = -2ab^2$; $-6abc + 3abc + 7abc = 4abc$, $5ac^2 + 7ac^2 - 3ac^2 = 9ac^2$; on a donc pour la somme des trois quantités, $-2ab^2 + 4abc + 9ac^2$.

66. On propose de retrancher de $9\,a^3 - 6\,a^2\,b + 7\,a\,b^2 - 8\,b^3$, la quantité $3\,a^3 - 7\,a^2\,b - 9\,a\,b^2 + 11\,b^3$. Après avoir changé les signes de la quantité qu'on veut retrancher (n°. 8), on l'écrira au-dessous de celle dont on veut la retrancher, de manière que les quantités pareilles qui entrent dans chacune soient dans la même colonne verticale. On fera ensuite la réduction :

$$\begin{array}{r} 9\,a^3 - 6\,a^2\,b + 7\,a\,b^2 - 8\,b^3 \\ -3\,a^3 + 7\,a^2\,b + 9\,a\,b^2 - 11\,b^3 \\ \hline 6\,a^3 + a^2\,b + 16\,a\,b^2 - 19\,b^3 \end{array}$$

Or, $9\,a^3 - 3\,a^3 = 6\,a^3$, $-6\,a^2\,b + 7\,a^2\,b = a^2\,b$, $+7\,a\,b^2 + 9\,a\,b^2 = 16\,a\,b^2$, $-8\,b^3 - 11\,b^3 = -19\,b^3$; on a donc pour la différence demandée $6\,a^3 + a^2\,b + 16\,a\,b^2 - 19\,b^3$. On ne perdra pas de vue que toute quantité qui n'est précédée d'aucun signe est supposée avoir le signe +.

De la Multiplication et de la Division.

67. Ayant démontré, comme nous l'avons fait n°. 37, que + multiplié par + donne +, que + multiplié par − ou − par + donne −, que − multiplié par − donne +, la multiplication ne consiste qu'à écrire l'une sous l'autre les quantités qu'on veut multiplier, à multiplier ensuite tous les termes du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur, en plaçant, pour simplifier, les quantités pareilles dans la même colonne verticale. Prenons pour exemple les deux quantités $a^4 - 4\,a^3\,b + 6\,a^2\,b^2 - 4\,a\,b^3 + b^4$ et $a^2 - 2\,a\,b + b^2$. On les écrira comme on voit dans le tableau ci-joint :

$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$
$a^2 - 2ab + b^2$

$a^6 - 4a^5b + 6a^4b^2 - 4a^3b^3 + a^2b^4$
$\quad - 2a^5b + 8a^4b^2 - 12a^3b^3 + 8a^2b^4 - 2ab^5$
$\quad\quad + a^4b^2 - 4a^3b^3 + 6a^2b^4 - 4ab^5 + b^6$

$a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

Après quoi, on multipliera tous les termes du multiplicande par a^2, et on aura $a^6 - 4a^5b + 6a^4b^2 - 4a^3b^3 + a^2b^4$; passant ensuite à la multiplication par $-2ab$, on trouvera $-2a^5b + 8a^4b^2 - 12a^3b^3 + 8a^2b^4 - 2ab^5$; enfin on multipliera par b^2, et on aura $a^4b^2 - 4a^3b^3 + 6a^2b^4 - 4ab^5 + b^6$. On fera la réduction, et il en résultera que le produit demandé est $a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$.

Autre Exemple d'une Multiplication.

$a^6 + a^4b^2 + a^2b^4 + b^6$
$a^2 - b^2$

$a^8 + a^6b^2 + a^4b^4 + a^2b^6$
$\quad - a^6b^2 - a^4b^4 - a^2b^6 - b^8$

$a^8 \quad 0 \quad 0 \quad 0 - b^8$

Dans cet exemple $a^8 - b^8$ est le produit demandé.

68. Pour la division, il faut s'assurer d'abord que $+$ divisé par $+$ donne $+$ au quotient, que $+$ divisé

par — ou — divisé par + donne —, que — divisé par — donne +. On procédera ensuite comme dans l'exemple suivant, où l'on propose de diviser $a^8 - b^8$ par $a^2 - b^2$.

$$\begin{array}{l|l} a^8 - b^8 & a^2 - b^2 \\ \hline & a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6 \\ 0 + a^6 b^2 - b^8 & \\ \quad 0 + a^4 b^4 - b^8 & \\ \quad\quad 0 + a^2 b^6 - b^8 & \\ \quad\quad\quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

On écrira le diviseur à la droite du dividende ; et, les ayant séparés par un crochet, on tirera sous le diviseur une barre, au-dessous de laquelle on écrira le quotient à mesure qu'on le trouvera. Le dividende et le diviseur étant ainsi disposés, on commencera par diviser a^8 par a^2, et on trouvera a^6 qu'on écrira au quotient. On multipliera le diviseur par a^6, et, le produit $a^8 - a^6 b^2$ étant retranché du dividende, on aura $a^6 b^2 - b^8$. On divisera $a^6 b^2$ par a^2, ce qui donnera $a^4 b^2$, qu'on écrira au quotient après a^6 ; puis on multipliera le diviseur par $a^4 b^2$, et, le produit $a^6 b^2 - a^4 b^4$ étant ôté de $a^6 b^2 - b^8$, il restera $a^4 b^4 - b^8$. En continuant de la même manière, on divisera $a^4 b^4$ par a^2, et on aura au quotient $a^2 b^4$ par lequel on multipliera le diviseur. Le produit $a^4 b^4 - a^2 b^6$ étant ôté de $a^4 b^4 - b^8$, il restera $a^2 b^6 - b^8$ à diviser par $a^2 - b^2$; la division se fait sans reste et donne au quotient b^6. Donc dans cet exemple le diviseur est exactement contenu dans le dividende, et on a pour quotient $a^6 + a^4 b^2 + a^2 b^4 + b^6$.

Nous proposerons pour second exemple de diviser $a^6 + b^6$ par $a^3 + b^3$.

$$\begin{array}{l|l} a^6 + b^6 & a^3 + b^3 \\ \hline & a^3 - b^3 + \dfrac{2\,b^6}{a^3 + b^3} \\ 0 - a^3 b^3 + b^6 & \\ \quad 0 \quad + 2\,b^6 & \end{array}$$

En divisant a^6 par a^3, on trouve a^3 qu'on écrira au quotient; et, multipliant ensuite le diviseur par a^3, on aura $a^6 + a^3 b^3$ qui, étant retranché du dividende, donne $- a^3 b^3 + b^6$. On divisera $- a^3 b^3$ par a^3, et on aura $- b^3$, qu'on écrira au quotient; puis on multipliera le diviseur par $- b^3$, et, le produit $- a^3 b^3 - b^6$ étant oté de $- a^3 b^3 + b^6$, il restera $2\,b^6$ qui ne peut point être divisé par $a^3 + b^3$; on ne fera donc qu'indiquer cette division et on aura $\frac{a^6 + b^6}{a^3 + b^3} = a^3 - b^3 + \frac{2\,b^6}{a^3 + b^3}$. La division de $2\,b^6$ par $a^3 + b^3$ ne peut donner au quotient qu'une suite infinie. Nous nous occuperons bientôt de ce problême.

Des Fractions.

69. Après ce que nous avons dit sur les fractions (n°s. 13, 14, 15, 16), il nous reste ce problême à résoudre: réduire une fraction à ses moindres termes, en cherchant le plus grand commun diviseur du numérateur et du dénominateur. Nous nous proposerons d'abord quelques exemples en nombre.

On demande de trouver le plus grand commun diviseur des deux termes de la fraction $\frac{2016}{5796}$. On divisera le plus grand terme 5796 par le moindre 2016, on aura au quotient 2 et un reste 1764; on divisera

2016 par 1764, on aura au quotient 1 et un reste 252; on divisera 1764 par ce reste 252, on aura au quotient 7: et, comme cette division se fait exactement, 252 est le plus grand commun diviseur des deux nombres 2016 et 5796. En effet, on a $1764 = 7 \times 252$; donc 252 est le plus grand diviseur de 1764: $2016 = 7 \times 252 + 252$; donc 252 est encore le plus grand diviseur de 2016: il est aussi le plus grand diviseur de $5796 = 2 \times 7 \times 252 + 2 \times 252 + 7 \times 252$; donc, etc.

Proposons-nous pour second exemple en nombre la fraction $\frac{20929}{86400}$. Nous ne ferons qu'indiquer la suite des opérations :

$$\frac{86400 \mid 20929}{2684 \quad 4}, \quad \frac{20929 \mid 2684}{2141 \quad 7}, \quad \frac{2684 \mid 2141}{543 \quad 1}, \quad \frac{2141 \mid 543}{512 \quad 3},$$

$$\frac{543 \mid 512}{31 \quad 1}, \quad \frac{512 \mid 31}{16 \quad 16}, \quad \frac{31 \mid 16}{15 \quad 1}, \quad \frac{16 \mid 15}{1 \quad 1}, \quad \frac{15 \mid 1}{0 \quad 15};$$

il suit que l'unité seule est le plus grand commun diviseur des deux nombres 20929 et 86400.

70. Généralement a et b étant deux quantités quelconques et $a > b$, en divisant successivement, on formera cette suite d'équations :

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}, \quad \frac{b}{r} = q\,1 + \frac{r1}{r}, \quad \frac{r}{r1} = q\,2 + \frac{r2}{r1},$$

$$\frac{r1}{r2} = q\,3 + \frac{r3}{r2}, \quad \frac{r2}{r3} = q\,4.$$

Nous ne pousserons pas plus loin ces calculs, et nous supposerons que la dernière division s'est faite sans reste; alors $r3$ est le plus grand commun diviseur des quantités a et b. En effet, on tire des équations précédentes :

$$r2 = r3\,q\,4, \quad r1 = r3\,q\,3\,q\,4 + r3, \quad r = r3\,q\,2\,q\,3\,q\,4 + r3\,q\,2 + r3\,q\,4, \quad b = r3\,q\,1\,q\,2\,q\,3\,q\,4 + r3\,q\,1\,q\,2 + r3\,q\,1\,q\,4 + r3\,q\,3\,q\,4 + r3.$$

Comme en algèbre on a besoin de beaucoup de lettres pour indiquer des quantités différentes, nous ferons souvent usage du signe que nous venons d'introduire. Le chiffre qui est à la gauche de la lettre, et sur la même ligne, comme dans $2a$, est un coefficient; mais en le plaçant à la droite de la lettre et sur la même ligne, comme dans $a2$, on n'indiquera jamais qu'une lettre différente de a.

Des Fractions continues.

71. On tire des équations précédentes,

$$\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q^1 + \frac{r^1}{r}} = q + \frac{1}{q^1 + \frac{1}{q^2 + \frac{r^2}{r^1}}} =$$

$$q + \frac{1}{q^1 + \frac{1}{q^2 + \frac{1}{q^3 + \frac{r^3}{r^2}}}} = q + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4}.$$

Donc $\frac{a}{b} = q + \frac{1}{q^1} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4}$.

On a donné à ce genre de fractions le nom de fractions continues : si $\frac{a}{b}$ n'étoit point une fraction rationnelle, la fraction continue ne se termineroit pas, et iroit nécessairement à l'infini. Nous venons de voir que la fraction $\frac{1796}{2016}$ donne pour diviseurs successifs 2, 1, 7; elle est donc égale à la fraction continue $2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{7}$. En effet, $1 + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}$; donc la fraction continue $= 2 + \frac{7}{8} = \frac{23}{8}$; c'est la proposée réduite à ses moindres termes.

72. Supposons que P développé donne la fraction continue à l'infini,

$q+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\frac{1}{q_4}+$ etc. ;

en en prenant les deux premiers termes, on aura $q+\frac{1}{q_1}=\frac{qq_1+1}{q_1}$; les trois premiers, on aura $q+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}=q+\frac{q_2}{q_1q_2+1}=\frac{qq_1q_2+q+q_2}{q_1q_2+1}$ $=\frac{(qq_1+1)q_2+q}{q_1q_2+1}$; les quatre premiers, on aura $q+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}=q+\frac{1}{q_1}+\frac{q_3}{q_2q_3+1}=$ $q+\frac{q_2q_3+1}{q_1q_2q_3+q_1+q_3}=\frac{qq_1q_2q_3+qq_1+qq_3+q_2q_3+1}{q_1q_2q_3+q_1+q_3}$ $+\frac{((qq_1+1)q_2+q)q_3+qq_1+1}{(q_1q_2+1)q_3+q_1}$, etc.

De cette manière, on trouvera une suite de fractions qui approcheront toujours plus de la valeur de la quantité P. Si nous représentons ces fractions toujours convergentes vers la valeur de P, par

$\frac{A}{A_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{C}{C_1}, \frac{D}{D_1}$, etc., on aura $A=q$, $A_1=1$, $B=qA_1+1$, $B_1=q_1$, $C=q_2B+A$, $C_1=q_2B_1+A_1$, $D=q_3C+B$, $D_1=q_3C_1+B_1$, etc. ; on aura aussi $BA_1-AB_1=1$, $CB_1-BC_1=-1$, $DC_1-CD_1=1$, etc.

73. La fraction rationnelle $\frac{86400}{20929}$ développée, donne la fraction continue

$4+\frac{1}{7}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\frac{1}{16}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{15}$;

dans cet exemple, on a 4, 7, 1, 3, 1, 16, 1, 1, 15 pour les valeurs de q, $q1$, $q2$, $q3$, $q4$, $q5$, $q6$, $q7$, $q8$. On a par conséquent $A = 4$, $A1 = 1$, $B = 29$, $B1 = 7$, $C = 33$, $C1 = 8$, $D = 128$, $D1 = 31$, $E = 161$, $E1 = 39$, $F = 2704$, $F1 = 655$, $G = 2865$, $G1 = 694$, $H = 5569$, $H1 = 1349$, $J = 86400$, $J1 = 20929$. La dernière fraction $\frac{I}{I1}$ est la même que la fraction proposée; ainsi la série ne peut pas être poussée plus loin. On a aussi dans cet exemple, $BA1 - AB1 = 29 - 28 = 1$, $CB1 - BC1 = 231 - 232 = -1$, $DC1 - CD1 = 1024 - 1023 = 1$, $ED1 - DE1 = 4991 - 4992 = -1$, $FE1 - EF1 = 105456 - 105455 = 1$, etc.

74. Ces dernières équations font voir que les fractions $\frac{A}{A1}$, $\frac{B}{B1}$, etc. sont réduites à leurs moindres termes; car si A et A1, B et B1, C et C1, etc., avoient des communs diviseurs autres que l'unité, les nombres entiers $BA1 - AB1$, $CB1 - BC1$, etc. seroient aussi divisibles par ces mêmes diviseurs; ce qui ne peut être, puisque ces nombres entiers ne sont autre chose que 1, — 1, etc.: on tire encore de ces mêmes équations,

$$\frac{B}{B1} - \frac{A}{A1} = \frac{1}{A1\,B1}, \quad \frac{C}{C1} - \frac{B}{B1} = \frac{-1}{B1\,C1}, \quad \frac{D}{D1} - \frac{C}{C1} = \frac{1}{C1\,D1}, \text{ etc.}$$

d'où il suit que les différences de deux termes consécutifs de la suite $\frac{A}{A1}$, $\frac{B}{B1}$, $\frac{C}{C1}$, etc. forment une série convergente; et, comme les termes de cette série ont alternativement les signes + et —, on voit que la seconde fraction est plus grande que la première, la

troisième moindre que la seconde, la quatrième plus grande que la troisième, et ainsi de suite.

75. Aux exemples en nombres qui précèdent, nous ajouterons celui-ci: développer en fraction continue la fraction 3,141592653 5, qui est un rapport très-approché de la demi-circonférence du cercle au rayon pris pour l'unité. On aura $q = 3$, $q\,1 = 7$, $q\,2 = 15$, $q\,3 = 1$, $q\,4 = 292$, $q\,5 = 1$, etc, et cette suite de fractions :

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215},$$

où $\frac{22}{7} > \frac{3}{1}$, $\frac{333}{106} < \frac{22}{7}$, $\frac{355}{113} > \frac{333}{106}$, $\frac{103993}{33102} < \frac{355}{113}$, $\frac{104348}{33215} > \frac{103993}{33102}$, etc.

Ces fractions donnent des rapports plus ou moins approchés de la demi-circonférence du cercle au rayon. Le premier $\frac{3}{1}$ est beaucoup trop foible; celui donné par Archimède $\frac{22}{7}$ est trop grand, mais il est le plus exact de tous ceux dont le numérateur n'excède pas 100; $\frac{333}{106}$ et $\frac{355}{113}$, dont l'un est trop foible et l'autre trop grand, sont les plus exacts de tous les rapports dont les numérateurs n'excèdent pas 1000, etc. Nous ferons d'autres usages dans la suite de la théorie des fractions continues.

De la manière de développer les Fractions en séries.

76. La série qui résulte du développement d'une fraction, soit par la division soit de toute autre manière, ou n'est rien, ou doit converger vers la valeur de cette fraction : ses termes doivent donc aller en diminuant. Les termes de la série décimale 0,142857142857.... vont en diminuant; aussi plus on prend de ces termes, plus on approche de la fraction $\frac{1}{7}$, dont la série est développée. Le premier terme de ce genre de séries

contient des dixièmes, le second des centièmes, le troisième des millièmes, le quatrième des dix-millièmes, et ainsi de suite. Nous dirons que le premier est une petite quantité du premier ordre, le second une petite quantité du second ordre, le troisième une petite quantité du troisième ordre, etc. Généralement x étant une fraction moindre que 1, les puissances successives de x seront des petites quantités du second ordre, du troisième ordre, du quatrième ordre, etc.; nous ferons souvent usage de cette manière de s'exprimer. Cela posé, x étant moindre que 1, si la série développée d'une fraction quelconque peut être représentée par

$$A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 +, \text{ etc.},$$

elle sera nécessairement convergente. Tout consiste donc à faire voir qu'il n'y a pas de fraction qui ne puisse être développée en une série de cette forme.

77. Soit proposé $\frac{a}{m+n}$. Si m est plus grand que n, je ferai $\frac{n}{m} = x$, et la fraction sera changée en celle-ci, $\frac{a}{m} \cdot \frac{1}{1+x}$. Je supposerai

$$\frac{1}{1+x} = A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \text{etc.};$$

et, ayant multiplié les deux membres de cette équation par $1 + x$, je la changerai en celle-ci :

$$1 = A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \text{etc},$$
$$+ A\,x + B\,x^2 + C\,x^3 + D\,x^4 + \text{etc},$$

à laquelle je puis donner cette forme :

$$A + B\,.\,x + C\,.\,x^2 + D\,.\,x^3 + E\,x^4 + \text{etc.} = 0,$$
$$-1 + A \quad + B \quad + C \quad + D$$

en convenant que par $+B.x, +C.x^2$, etc, on
$+A \quad +B$

entendra toujours le produit de $B+A$ par x, celui de $C+B$ par x^2, etc. Il ne s'agit plus maintenant que de tirer de cette équation les valeurs des indéterminées A, B, C, etc.; ce qui exige quelques considérations préliminaires qui méritent beaucoup d'attention.

78. Pour s'assurer que les quantités $\frac{a^4-b^4}{a+b}$, et $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$ sont identiquement la même chose, on formera l'équation

$\frac{a^4-b^4}{a+b} = a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, de laquelle on tirera, en multipliant les deux membres par $a+b$,

$$a^4 - b^4 = a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + a^3b - a^2b^2 + ab^3 - b^4 :$$

comme dans cette équation tous les termes se détruisent mutuellement, on en conclura qu'il y a parfaite égalité entre les quantités proposées. On a donné à ce genre d'équations, où tous les termes doivent se détruire mutuellement, le nom d'équations identiques. Une équation ordinaire, telle que $x^2 - 2x = 3$, ne devient équation identique que lorsqu'on a substitué à x sa valeur. Si dans cette équation je mets pour x l'une de ses valeurs 3, j'aurai l'équation identique $9 - 6 = 3$; j'aurai de même une équation identique en mettant pour x son autre valeur -1, car elle devient par cette substitution $1 + 2 = 3$.

L'équation $A + B.x + C.x^2 + \text{etc.} = 0$,
$-1 + A \quad +B$

que j'ai formée en égalant une fraction à son quotient, est donc une équation identique, où tous les termes doivent se détruire et donner $0 = 0$. Mais ils doivent

se

se détruire quelque soit x ; car la division doit être possible sans qu'il soit nécessaire de donner à x une valeur particulière. Si je supposois que le premier terme $A - 1$ est détruit par le second $(B+A)x$, je formerois cette équation $A - 1 + (B+A)x = 0$, et je donnerois à x une valeur $\frac{1-A}{B+A}$; à plus forte raison je ne puis pas supposer que les trois premiers termes se détruisent, car j'aurois alors une équation du second dégré $A - 1 + (B+A)x + (C+B)x^2 = 0$, et la division ne seroit possible que pour l'une ou l'autre des deux valeurs de x, etc. Donc chacun des termes de l'équation identique doit être nul par lui-même, et l'on doit avoir $A - 1 = 0$, $(B+A)x = 0$, $(C+B)x^2 = 0$, etc. ; et, parce que x ne peut pas être nul, on doit avoir seulement $A - 1 = 0$, $B+A = 0$, $C+B = 0$, etc.

Donc dans toute équation identique, ordonnée par rapport aux puissances successives d'une quantité x qui ne doit prendre aucune valeur dans cette équation, chaque somme de coefficiens qui affectent une même puissance de x doit être égale à zéro. Ce principe qui constitue la méthode des indéterminés, est un des plus féconds de l'analyse.

79. On aura donc dans l'exemple dont il s'agit $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $D = -1$, $E = 1$, etc. ;

et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc.}$;

partant $\frac{a}{m+n} = \frac{a}{m}\left(1 - \frac{n}{m} + \left(\frac{n}{m}\right)^2 - \left(\frac{n}{m}\right)^3 + \left(\frac{n}{m}\right)^4 - \text{etc.}\right)$.

Si l'une ou l'autre de ces deux quantités m ou n avoit le signe —, tous les termes de la série auroient le signe + ; nous remarquerons encore que toute pro-

gression géométrique à l'infini est développée d'une fraction dont le dénominateur est binome.

Prenons $\frac{3}{4}$ pour la fraction que nous voulons développer en une progression géométrique. Nous lui donnerons cette forme $\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$; alors $a = 1$, $m = 1$, $n = \frac{1}{3}$, et on a cette série $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} -$ etc, de laquelle si l'on ne prend que les deux premiers termes, on trouve $\frac{2}{3}$ qui diffère de $\frac{1}{12}$ de la proposée; en en prenant trois, on a $\frac{7}{9}$ qui diffère de la proposée de $\frac{1}{36}$; la somme de quatre termes ou $\frac{20}{27}$ en diffère de $\frac{1}{108}$, etc.; ainsi la série converge vers la valeur de la fraction dont elle est développée.

80. On propose de développer en série la fraction $\frac{h+i}{m+n+p}$, où $h > i$, $m > n$, $n > p$.

On fera $\frac{i}{h} = ax$, $\frac{n}{m} = bx$, $\frac{p}{m} = cx^2$, et la fraction proposée sera changée en celle-ci :

$\frac{h}{m} \cdot \frac{1+ax}{1+bx+cx^2}$. On fera ensuite

$$\frac{1+ax}{1+bx+cx^2} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.};$$

et, multipliant les deux membres par $1 + bx + cx^2$, on formera l'équation identique

$$\begin{array}{llllll} A.x & + B.x^2 & + C.x^3 & + D.x^4 & + E.x^5 & \\ + b & + bA & + bB & + bC & + bD & \\ - a & + c & + cA & + cB & + cC & \\ & & + \text{etc.} = 0, & & & \end{array}$$

de laquelle on tirera, $A + b - a = 0$,
$B + bA + c = 0$, $C + bB + cA = 0$,
$D + bC + cB = 0$, $E + bD + cC = 0$, etc.

et par l'élimination, les valeurs de A, B, C, etc.

81. La fraction proposée étant $\frac{4}{3}$, si on la met sous cette forme, $\frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$, on aura $h = 1$, $i = 0$, $m = 1$, $n = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{4}$. On pourra supposer $a = 0$, $b = -1$, $x = \frac{1}{2}$, $c = 1$, et il sera facile de tirer des équations précédentes, $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$, $D = -1$, $E = 0$, $F = 1$, $G = 1$, $H = 0$, $I = -1$, $K = -1$, etc.; et pour la série développée de la fraction $\frac{4}{3}$,

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} + \text{etc.}$$

Mais $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $\frac{4}{3} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$; donc

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}} - \text{etc.},$$
$$\frac{1}{18} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{10}} - \frac{1}{2^{13}} + \text{etc.},$$
$$\frac{1}{9} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^{12}} + \text{etc.}$$

La fraction $\frac{9}{7}$ étant mise sous cette forme, $\frac{1}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}$, on la développera comme nous venons de faire la précédente, et on aura

$$\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \frac{1}{2187} - \text{etc.}$$

Mais $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $\frac{9}{7} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{21}$; donc

$$\frac{1}{21} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^6} - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} + \frac{1}{3^{10}} - \text{etc.},$$
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^5} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^9} - \text{etc.},$$
$$\frac{1}{28} = \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^9} - \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.}$$

Nous trouverions pour les valeurs des fractions $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{28}$, les mêmes séries, en développant les fractions binomes, $\frac{1}{1+2^3}$ et $\frac{1}{1+3^3}$; ces calculs n'ont pas de difficultés.

82. Pour développer en série la fraction $\frac{h+i+k}{m+n+p+q}$, où $h > i$, $i > k$, $m > n$, $n > p$, $p > q$, on fera $\frac{i}{h} = ax$, $\frac{k}{h} = bx^2$, $\frac{n}{m} = cx$, $\frac{p}{m} = dx^2$, $\frac{q}{m} = ex^3$, et la proposée pourra être changée en celle-ci :

$$\frac{h}{m} \cdot \frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2+ex^3}.$$

On fera ensuite

$$\frac{1+ax+bx^2}{1+cx+dx^2+ex^3} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.};$$

et, multipliant les deux nombres par $1+cx+dx^2+ex^3$, on formera l'équation identique,

$$\begin{array}{llll} A.x + & B.x^2 + & C.x^3 + & D.x^4 + \text{etc.} = 0, \\ +c & +cA & +cB & +cC \\ -a & +d & +dA & +dB \\ & -b & +e & +eA \end{array}$$

de laquelle on tirera

$$A+c-a=0,\ B+cA+d-b=0,$$
$$C+cB+dA+e=0,\ D+cC+dB+eA=0,$$
$$E+cD+dC+eB=0,\ \text{etc.}$$

Quand bien même le nombre de termes du numérateur et du dénominateur seroit plus considérable, le calcul ne présenteroit pas de plus grandes difficultés.

83. Mais on peut présenter la question d'une autre manière, et demander de développer la fraction $\frac{a+bx+cx^2}{m+nx+px^2+qx^3}$, quelque soit x, une quantité fractionnaire moindre que 1, ou un nombre entier ; en

ne perdant point de vue que les séries ordonnées par rapport à des puissances successives de x doivent être convergentes. Lorsque x est une quantité fractionnaire moindre que 1, on peut supposer

$$\frac{a+bx+cx^2}{m+nx+px^2+qx^3} = A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{etc.},$$

et former l'équation identique

$$\begin{aligned} 0 = {} & Am+Bm.x+Cm.x^2+Dmx^3+Emx^4+\text{etc.} \\ & -a+An+Bn+Cn+Dn \\ & -b+Ap+Bp+Cp \\ & -c+Aq+Bq \end{aligned}$$

de laquelle on tire $Am = a$, $Bm + An = b$,
$Cm + Bn + Ap = c$, $Dm + Cn + Bp + Aq = 0$,
$Em + Dn + Cp + Bq = 0$,
$Fm + En + Dp + Cq = 0$, etc.

Ce résultat ne peut point être admis, lorsque x est un nombre entier. Dans ce cas, je changerai la fraction en celle-ci :

$$\frac{x^2\left(c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}\right)}{x^3\left(q+\frac{p}{x}+\frac{n}{x^2}+\frac{m}{x^3}\right)};$$

je ferai ensuite

$$\frac{c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}}{q+\frac{p}{x}+\frac{n}{x^2}+\frac{m}{x^3}} = M+Nx^{-1}+Px^{-2} + Qx^{-3}+\text{etc.};$$

et, ayant multiplié les deux membres par le dénominateur de la fraction, j'aurai l'équation identique

$$\begin{array}{llllll} & Mq+Nqx^{-1}+Pqx^{-2}+Qqx^{-3}+Rqx^{-4} & & & & \\ -c & +Mp & +Np & +Pp & +Qp & \\ & -b & +Mn & +Nn & +Pn & \\ & & -a & +Mm & +Nm & \\ & +\text{etc.}=0, & & & & \end{array}$$

de laquelle je tirerai

$$Mq=c,\ Nq+Mp=b,\ Pq+Np+Mn=a,$$
$$Qq+Pp+Nn+Mm=0,$$
$$Rq+Qp+Pn+Nm=0,$$
$$Sq+Rp+Qn+Pm=0,\ \text{etc.}$$

Ces coefficiens déterminés, j'aurai

$$\frac{a+bx+cx^2}{m+nx+px^2+qx^3}=Mx^{-1}+Nx^{-2}+Px^{-3}+Qx^{-4}+\text{etc.};$$

et cette série est nécessairement convergente lorsque x est un nombre entier ou une fraction plus grande que 1. Au moyen des deux séries, $A+Bx+Cx^2+\text{etc.}$, $Mx^{-1}+Nx^{-2}+\text{etc.}$, dont l'une est nommée ascendante et l'autre descendante, le problême est complétement résolu.

84. J'ai toujours supposé que dans le numérateur, la plus haute puissance de x étoit au moins moindre d'une unité que dans le dénominateur. Si la fraction proposée n'avoit point cette condition, il seroit facile de l'y ramener. Si, par exemple, la fraction proposée étoit $\frac{a+bx+cx^2+dx^3}{m+nx+px^2+qx^3}$; en divisant dx^3+cx^2+bx+a par qx^3+px^2+nx+m, on trouveroit au quotient $\frac{d}{q}$, et une fraction

$$\frac{(cq-dp)x^2+(bq-dn)x+aq-dm}{q^2x^3+pqx^2+nqx+mq},$$

dans laquelle la plus haute puissance de x du dénominateur est plus grande d'une unité que la plus haute puissance de x du numérateur.

85. Lorsqu'une fraction est réduite à cette condition, on peut toujours la décomposer en fractions binomes de cette forme :

$\frac{\alpha}{f+gx}$, $\frac{\beta}{h+ix}$, $\frac{\gamma}{k+lx}$, etc. En effet, en prenant deux de ces fractions, et les réduisant au même dénominateur, on trouve $\frac{\alpha h+\beta f+(\alpha i+\beta g)x}{(f+gx)(h+ix)}$, qu'on peut égaler à $\frac{a+bx}{m+nx+px^2}$. La seule difficulté qui pourroit se présenter viendroit de la supposition que nous sommes obligés de faire que $m+nx+px^2$ peut être décomposé en deux facteurs $f+gx$; $h+ix$; or, nous avons démontré (n°. 52) que cela est toujours possible. Si l'on prend un plus grand nombre de fractions, un nombre n par exemple, comme en les réduisant au même dénominateur, chaque numérateur est multiplié par tous les dénominateurs, excepté celui qu'il a, la fraction résultante aura pour numérateur un multinome du degré $n-1$ que nous pouvons représenter par $a\,1+b\,1\,x+c\,1\,x^2+\ldots\ldots+l\,1\,x^{n-1}$, et pour dénominateur un multinome du degré n, $m\,1+n\,1\,x+p\,1\,x^2+\ldots\ldots\ldots+u\,1\,x^n$, qui résulte de la multiplication du nombre n de facteurs $f+gx$, $h+ix$, $k+lx$, etc. Cette fraction pourra être égalée à toute autre fraction du même ordre qui sera proposée, et il ne s'agira que de décomposer le dénominateur de celle-ci en facteurs binomes. Pour décomposer le facteur trinome $m+nx+px^2$ en ses facteurs binomes, nous avons résolu l'équation $m+nx+px^2=0$; pour décomposer le multinome $m+nx+px^2+qx^3+$ etc., il faudra résoudre

l'équation $m + nx + px^2 + qx^3 + \text{etc.} = 0$. Nous nous occuperons de ce problême dans la 3e partie de cet Ouvrage.

Des Fractions rationelles.

86. Les fractions dont nous nous occupons maintenant, dans lesquelles x n'a pour exposant que des nombres entiers, ont été nommées fractions rationelles. Lorsqu'on connoîtra les facteurs du dénominateur d'une fraction rationelle, on pourra la décomposer en fractions binomes. Nous prendrons pour exemple la fraction $\frac{2-4x+x^2}{(1+5x)(1-x^2)}$, dont le dénominateur a pour facteur $1+5x$, $1+x$, $1-x$. Il faudra faire

$$\frac{2-4x+x^2}{(1+5x)(1-x^2)} = \frac{A}{1+5x} + \frac{B}{1+x} + \frac{C}{1-x},$$

A, B, C étant des coefficiens indéterminés. En réduisant tout au même dénominateur, on trouvera

$2 - 4x + x^2 = A(1 - x^2) + B(1 + 5x)(1 - x) + C(1 + 5x)(1 + x)$; équation identique qui, toute réduction faite, devient

$$\begin{array}{llll} A & +4B. & x- & A. x^2 = 0, \\ +B & +6C & -5B & \\ +C & +4 & +5C & \\ -2 & & -1 & \end{array}$$

et de laquelle on tire

$$A + B + C = 2,\ 2B + 3C = -2,$$
$$5C - 5B - A = 1.$$

La première et la troisième donnent

$$C + B = 2 - A,\ C - B = \frac{1+A}{5};$$

partant $C = \frac{11-4A}{10}$, $B = \frac{9-6A}{10}$.

En substituant ces valeurs dans la seconde équation, on en tire $24A = 71$, et ensuite $B = -\frac{7}{8}$, $C = -\frac{1}{12}$. Le problème est donc parfaitement résolu.

87. Les facteurs d'un trinome $m + nx + px^2$, pourroient être imaginaires, et de la forme $x + a + b\sqrt{-1}$, $x + a - b\sqrt{-1}$ (n° 52). Nous éviterons de les introduire dans le calcul; et lorsque dans la décomposition d'un multinome nous trouverons des facteurs imaginaires, nous conserverons le facteur trinome auquel ils appartiendront tel qu'il sera; et au lieu de n'avoir que des fractions de la forme $\frac{A}{f+gx}$, nous en introduirons de la forme $\frac{B+Cx}{m+nx+px^2}$. Si, par exemple, on proposoit la fraction rationelle $\frac{1+3x-2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)}$; comme les deux facteurs de $1 + x^2$ sont imaginaires, on supposeroit

$$\frac{1+3x-2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} + \frac{E+Fx}{1+x^2},$$

de laquelle on tireroit

$$\begin{array}{cccc} A - A.x + A.x^2 - A.x^3 = 0; \\ +B\ +B & +B & +B \\ +E\ +F & -E & -F \\ -1\ -3 & +2 \end{array}$$

pour déterminer les coefficiens, cette équation identique fourniroit les équations particulières

$$A + B + E = 1, \quad -A + B + F = 3,$$
$$A + B - E = -2, \quad -A + B - F = 0,$$

La première et la troisième donnent $B+A=1-E$, $B+A=E-2$, partant $E=\frac{3}{2}$; la seconde et la quatrième donnent $B-A=3-F$, $B-A=F$, partant $F=\frac{3}{2}$. On trouve ensuite $B+A=-\frac{1}{2}$, $B-A=\frac{3}{2}$; d'où l'on tire $B=\frac{1}{2}$, $A=-1$. Ainsi, la fraction proposée est décomposée en ces fractions simples :

$$-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(1-x)}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1+x}{1+x^2}.$$

88. Il pourroit encore arriver que le dénominateur eût des facteurs égaux ou premiers entr'eux, que la proposée fût $\frac{1+x^3}{(1-x)^3(1+x^2)^2}$. A cause des trois facteurs $1-x$, $1-x$, $1-x$, introduirons-nous trois fractions binomes, $\frac{A}{1-x}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{1-x}$? Mais il est clair que ces trois fractions se réduisent à une seule, $\frac{M}{1-x}$; et je ne supposerai pas qu'une fraction qui a pour dénominateur $(1-x)^3$, puisse être égale à $\frac{M}{1-x}$, quelque soit le coefficient M. Je conserverai donc le facteur quatrinome $(1-x)^3$, sans le décomposer, et je lui donnerai pour numérateur un trinome indéterminé $A+Bx+Cx^2$, afin que dans la fraction introduite, le plus haut exposant de x dans le numérateur, étant moindre d'une unité seulement que le plus haut exposant de x dans le dénominateur, elle soit la plus générale de son espèce. Pour les mêmes raisons, je conserverai le facteur $(1+x^2)^2$ tel qu'il est, et je donnerai à ce quintinome pour numérateur, un quatrinome indéterminé $E+Fx+Gx^2+Hx^3$. On ne perdra pas de vue que l'exposant de la plus haute puissance de x, augmenté d'une unité, est l'exposant du multinome ; il est binome lorsque x a

pour exposant 1 ; trinome, lorsqu'il a pour plus grand exposant 2 ; quatrinome, lorsque le plus grand exposant est 3, etc. Il est donc démontré que nous pouvons supposer

$$\frac{1+x^3}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \frac{A+Bx+Cx^2}{(1-x)^3} + \frac{E+Fx+Gx^2+Hx^3}{(1+x^2)^2},$$

et que l'équation identique qui en résultera doit donner autant d'équations partielles qu'il est nécessaire pour déterminer les coefficiens inconnus. Cette équation est

$$\begin{array}{llllll} E-3E.x+3E.x^2- & E.x^3- & F.x^4-G.x^5-H.x^6=0 \\ +A+F & -3F & +3F & +3G & +3H & +C \\ -1+B & +G & -3G & -3H & +B & \\ & +2A & +H & +A & & \\ & +C & +2B & +2C & & \\ & & -1 & & & \end{array}$$

On en tire $H=C$, $E=1-A$, et substituant ces valeurs de H et E, les cinq autres équations

$$3A+B+F=3,\quad A-C+3F-G=3,$$
$$A+2B+C+3(F-G)=2,$$
$$A-C+3G-F=0,\quad B+3C-G=0.$$

Celles-ci donnent $A=1$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{4}$, $F=\frac{3}{4}$, $G=0$, et par conséquent $H=\frac{1}{4}$, $E=0$; partant

$$\frac{1+x^3}{(1-x)^3(1+x^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{4-3x+x^2}{(1-x)^3} + \frac{3x+x^3}{(1+x^2)^2}\right].$$

Des Séries récurrentes.

89. Toute série développée d'une fraction rationelle

a été nommée série récurrente ; la série géométrique $m(1 + nx + (nx)^2 + (nx)^3 + (nx)^4 + \text{etc.})$, développée de la fraction binome $\frac{m}{1-nx}$, est une série récurrente ; la série

$5 - 4x + 14x^2 - 22x^3 + 50x^4 - 94x^5 + \text{etc.}$,

développée de la fraction trinome $\frac{5+x}{1+x-2x^2}$, est une série récurrente. Soit la série récurrente $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$; or, e, f, g, h, etc., étant des nombres quelconques, si la série est développée d'une fraction binome, on aura $eU + fT = 0$, où U est un des coefficiens A, B, etc., et T celui qui le précède ; si elle est développée d'une fraction trinome, on aura $eU + fT + gS = 0$; on aura $eU + fT + gS + hR = 0$, si elle est développée d'une fraction quatrinome; et ainsi de suite. Dans la série récurrente $5 - 4x + 14x^2 - \text{etc.}$, on a $94 - 50 - 2 \times 22 = 0$; $50 - 22 - 2 \times 14 = 0$, $22 - 14 - 2 \times 4 = 0$, etc.

90. Puisqu'une fraction rationelle peut toujours être décomposée en fraction binome, toute série récurrente pourra toujours être partagée en série géométrique: et pour en donner un exemple, la fraction $\frac{5+x}{1+x-2x}$ étant égale à la somme des deux fractions binomes $\frac{2}{1-x}$ et $\frac{3}{1+2x}$, la série $5 - 4x + 14x^2 - \text{etc.}$, doit être égale à la somme des deux séries géométriques $2(1 + x + x^2 + \text{etc})$ et $3(1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \text{etc})$, dont la première est développée de $\frac{2}{1-x}$ et l'autre de $\frac{3}{1+2x}$.

Donc un terme quelconque d'une série récurrente est égal à la somme des termes correspondans des séries géométriques dans lesquelles on peut la décomposer :

$2x^n$ étant le terme $n+1$ de la série $2(1+x+x^2$ + etc., et $\pm 3(2x)^n$, où l'on prendra le signe + lorsque n sera pair, et le signe — lorsqu'il sera impair, le terme $n+1$ de la série $3(1-2x+4x^2$ — etc.); le terme correspondant de la série $5-4x+14x^2$ — etc. sera $2x^n \pm 3(2x)^n$. Si l'on fait successivement dans cette expression n égal à 0, 1, 2, 3, 4, etc., on trouve $2+3$, $2x-6x$, $2x^2+12x^2$, $2x^3-24x^3$, $2x^4+48x^4$, $2x^5-96x^5$, etc.; ce sont les termes successifs de la série récurrente.

91. On a donné à ce terme quelconque d'une série le nom de terme général. Ainsi, pour trouver le terme général d'une série récurrente, il faut, 1°. chercher la fraction rationelle dont elle est développée; 2°. décomposer cette fraction rationelle en ses fractions binomes; 3°. développer ces fractions binomes en séries géométriques; 4°. chercher le terme général de chacune des séries géométriques: la somme de tous ces termes sera le terme général de la série récurrente proposée.

Mais comment, étant donnée une série récurrente, peut-on remonter à la fraction rationelle dont elle est développée? Rien de plus simple, lorsqu'on connoîtra la relation entre les termes de la série. Si cette relation est telle que l'on ait $eU+fT+gS+hR+$ etc. $=0$, la fraction rationelle aura pour dénominateur $e+fx+gx^2+hx^3+$ etc; et, si on représente le numérateur par $a+bx+cx^2+$ etc., on aura en outre

$$a=eA,\ b=fA+eB,\ c=gA+fB+eC,$$
$$d=hA+gB+fC+eD,\ \text{etc.}$$

92. Nous ajouterons un exemple aux précédens, et nous demanderons le terme général de la série

$$1-6x+12x^2-48x^3+120x^4-\text{etc.}$$

On a $120-48-6\times 12=0$, $48-12-6\times 6=0$,

et en général $U + T - 6S = 0$; la fraction demandée a donc pour dénominateur $1 + x - 6x^2$. On trouve ensuite $a = 1$, $b = 1 - 6 = -5$, $c = -6 - 6 + 12 = 0$, et ceux qui suivent nuls, comme le précédent ; la fraction a donc pour numérateur $1 - 5x$. On la décomposera en fraction binome, et on aura

$\frac{1-5x}{1+x-6x^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{8}{1+3x} - \frac{3}{1-2x}\right)$, car les deux facteurs de $1 + x - 6x^2$, sont $1 + 3x$ et $1 - 2x$.

Maintenant $\frac{1}{1+3x} = 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \text{etc.}$, dont le terme général est $\pm (3x)^n$; $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \text{etc.}$, dont le terme général est $(2x)^n$; donc la série récurrente proposée a pour terme génétal $\pm \frac{8}{5}(3x)^n - \frac{3}{5}(2x)^n$. En effet, on trouvera tous les termes de la série en mettant dans cette expression 0, 1, 2, 3, etc., successivement pour n ; pourvu qu'on ait soin de prendre le signe + lorsque n est pair, et le signe — lorsqu'il est impair.

Des Nombres ordinaux.

93. Ayant une série $1, a, b, c, d$, etc, j'en forme par addition cette autre $1, (1 + a), (1 + a + b), (1 + a + b + c), (1 + a + b + c + d)$, etc., dont le terme du rang n, est la somme des n premiers termes de la première. Si je prends pour la première série celle des nombres premiers 1, 1, 1, 1, etc., la seconde sera celle des nombres seconds ou naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. ; si je prends celle des nombres naturels, l'autre sera celle des nombres troisièmes ou triangulaires 1, 3, 6, 10, 15, 21, etc. ; si je prends celle des nombres triangulaires, l'autre sera celle des nombres quatrièmes ou pyramidaux 1, 4, 10, 20, 35, 56, etc. ; de même au moyen des nombres pyra-

midaux, je forme les nombres cinquièmes 1, 5, 15, 35, 70, 126, etc., et ainsi de suite. Les nombres formés de cette manière se nomment en général nombres ordinaux. Ainsi le terme du rang n de la série des nombres ordinaux de l'ordre $q+1$, est égal à la somme des n premiers termes de la série des nombres ordinaux de l'ordre q; le terme du rang n de la série de l'ordre q, est au terme du même rang de la série de l'ordre $q+1$, comme q est à $n+q-1$.

94. On voit donc qu'en nommant $s2$, $s3$, $s4$, $s5$, etc., les termes du rang n des suites des nombres seconds, troisièmes, quatrièmes, cinquièmes, etc., on aura $s2 : s3 :: 2 : n+1$; à cause de $s2 = n$, on en tire $s3 = n.\frac{n+1}{2}$. On aura aussi $s3 : s4 :: 3 : n+2$, d'où l'on tire $s4 = n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$; $s4 : s5 :: 4 : n+3$; d'où l'on tire

$s5 = n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}$; etc. Il sera facile d'en conclure que le nombre ordinal de l'ordre q et du rang n, est égal à

$$n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.\frac{n+3}{4}.....\frac{n+q-3}{q-2}.\frac{n+q-2}{q-1};$$

ou qu'il est égal à

$$q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}.\frac{q+3}{4}.....\frac{q+n-3}{n-2}.\frac{q+n-2}{n-1};$$

on a donc pour la suite des nombres ordinaux de l'ordre q

$$1, q, q.\frac{q+1}{2}, q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}, q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}.\frac{q+3}{4},$$
$$q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}.\frac{q+3}{4}.\frac{q+4}{5}, \text{ etc.}$$

De l'élévation aux puissances, lorsque les exposans de ces puissances sont des nombres entiers positifs ou négatifs.

95. Les puissances successives de $1 - x$ ne sont autre chose que les produits successifs de $1 - x$ multiplié une fois, deux fois, trois fois, etc., par lui-même. On trouve par ces multiplications :

$$(1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2,$$
$$(1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3,$$
$$(1 - x)^4 = 1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4, \text{ etc.}$$

Si l'on cherche ensuite par la méthode de développer les fractions que nous avons exposée plus haut, les séries qui résultent de la division de 1 par $1 - x$, par $1 - 2x + x^2$, par $1 - 3x + 3x^2 - x^3$, etc., on trouvera

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \text{etc.},$$
$$(1 - x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{etc.},$$
$$(1 - x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \text{etc.},$$
$$(1 - x)^{-4} = 1 + 4x + 10x^2 + 20x^3 + 35x^4 + \text{etc.},$$
etc.

où les coefficiens ne sont autre chose que les nombres ordinaux de tous les ordres. On en doit conclure que

$$(1 - x)^{-q} = 1 + qx + q \cdot \frac{q+1}{2} x^2 + q \cdot \frac{q+1}{2} \cdot \frac{q+2}{3} x^3 + q \cdot \frac{q+1}{2} \cdot \frac{q+2}{3} \cdot \frac{q+3}{4} x^4 + \text{etc.}$$

96. Mais

96. Mais $(1-x)^q = \frac{1}{1+qx+q.\frac{q+1}{2}x^2+\text{etc.}}$:

soit cette fraction $= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}$, on aura l'équation identique

$$\begin{array}{rrrrr} Ax+ & B.x^2+ & & Cx^3+ & \\ +q\ +qA\ + & & qB\ + & & qC \\ & +q.\frac{q+1}{2}+ & q.\frac{q+1}{2}A\ + & & q.\frac{q+1}{2}B \\ & & +q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}\ + & & q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}A \\ & & & +q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}.\frac{q+3}{4} & \end{array}$$

$+$ etc. de laquelle on tire $A = -q$,

$$B = -qA - q.\frac{q+1}{2} = q.\frac{q-1}{2},$$

$$C = -qB - q.\frac{q+1}{2}A - q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}$$

$$= q.\frac{q-1}{2}.\frac{q-2}{3},$$

$$D = -qC - q.\frac{q+1}{2}B - q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}A$$

$$- q.\frac{q+1}{2}.\frac{q+2}{3}.\frac{q+3}{4} = q.\frac{q-1}{2}.\frac{q-2}{3}.\frac{q-3}{4},$$

$$E = q.\frac{q-1}{2}.\frac{q-2}{3}.\frac{q-3}{4}.\frac{q-4}{5}, \text{ etc.}$$

Donc $(1-x)^q = 1 - qx + q.\frac{q-1}{2}x^2 - q.\frac{q-1}{2}.\frac{q-2}{3}x^3 + q.\frac{q-1}{2}.\frac{q-2}{3}.\frac{q-3}{4}x^4 - \text{etc.}$;

série qui se termine toutes les fois que q est un nombre entier positif ; lorsque $q = 5$, elle est

$$1 - 5x + 10x^2 - 10x^3 + 5x^4 - x^5.$$

Mais si l'on y fait q négatif, on trouve la série du

n°. précédent, qui nécessairement est une suite infinie. On peut parvenir au même résultat par les combinaisons, et il n'est pas inutile de voir les choses sous différens points de vue.

97. Deux lettres, a, b, peuvent s'écrire de deux manières différentes, ab, ba : trois lettres, a, b, c, s'écrire de six manières ; car, c pouvant occuper trois places différentes dans ab et ba, on aura abc, acb, cab, bac, bca, cba : quatre lettres, a, b, c, d, s'écrire de 24 manières ; car d peut occuper quatre places différentes dans chacune des six combinaisons précédentes. On verra aussi aisément que cinq lettres peuvent s'écrire de 5 fois 24, ou de 120 manières différentes ; que six lettres peuvent s'écrire de 6 fois 120 ou de 720 manières différentes, et ainsi de suite. Ainsi, la combinaison deux à deux de n lettres doit être divisée par 2, si dans le problême on ne met point de différence entre ab et ba ; la combinaison trois à trois doit être divisée par 2. 3, si on ne met pas de différence entre abc, acb, etc. Dans la même supposition, il faudra diviser par 2. 3. 4, la combinaison de n lettres quatre à quatre ; par 2. 3. 4. 5, la combinaison de n lettres cinq à cinq ; par 2. 3. 4. 5. 6, la combinaison de n lettres six à six, et ainsi de suite. Cherchons maintenant de combien de manières on peut combiner n lettres deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc.

98. Chacune de ces lettres ne devant pas être combinée avec elle-même, ne peut l'être qu'avec les $n - 1$ autres, d'où il résultera $n.\overline{n-1}$ combinaisons deux à deux. Lorsqu'on combine les n lettres trois à trois, il faut que chacune des combinaisons deux à deux soit combinée avec chacune des lettres qu'elle ne renferme pas, c'est-à-dire avec $n - 2$ lettres, ce qui doit donner $n.\overline{n-1}.\overline{n-2}$ combinaisons. On trouvera, par

un raisonnement semblable, qu'en combinant n lettres quatre à quatre, il en doit résulter $n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}$. combinaisons; qu'il en doit résulter $n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}$, en les combinant cinq à cinq, et ainsi de suite. Mais si, dans le nombre des combinaisons, on doit regarder comme étant les mêmes celles qui ne diffèrent que par la position des lettres dans un même produit, on aura $n.\frac{n-1}{2}$, $n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}$, $n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}$, $n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\frac{n-4}{5}$, etc., pour les nombres qui expriment de combien de manières on peut combiner n lettres deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc.

99. Cela posé, soit un nombre n de facteurs

$x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, $x+e$, etc.;

le produit $(x+a)(x+b) =$

$x^2 + a.x + ab,$
$\quad + b$

le produit $(x+a)(x+b)(x+c) =$

$x^3 + a.x^2 + ab.x + abc,$
$\quad + b \quad + ac$
$\quad + c \quad + bc$

le produit $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) =$

$x^4 + a.x^3 + ab.x^2 + abc.x + abcd:$
$\quad + b \quad + ac \quad + abd$
$\quad + c \quad + ad \quad + acd$
$\quad + d \quad + bc \quad + bcd$
$\quad\quad + bd$
$\quad\quad + cd$

sans pousser plus loin ces calculs, on doit voir que le produit de tous les facteurs aura pour premier terme, x élevé à une puissance marquée par le nombre des facteurs ou x^n; qu'il aura pour second terme, x^{n-1} multiplié par la somme des lettres a, b, c, d, etc.; pour troisième terme, x^{n-2} multiplié par la somme des produits des mêmes lettres deux à deux; pour quatrième terme, x^{n-3} par la somme des produits de ces lettres trois à trois; pour cinquième terme, x^{n-4} par la somme des produits cinq à cinq, etc. Il suit de là que si tous ces facteurs sont égaux, ou si $a = b = c = d$, etc., on doit avoir $(x+a)^n$ égal à une suite de termes dont le premier est x^n; le second, x^{n-1} multiplié par a pris n fois, ou $n\,a\,x^{n-1}$; le troisième, x^{n-2} multiplié par a^2 pris $n.\frac{n-1}{2}$ fois, ou $n.\frac{n-1}{2}\,a^2\,x^{n-2}$, puisque n lettres multipliées deux à deux ne peuvent donner que $n.\frac{n-1}{2}$ produits différens; le quatrième, x^{n-3} multiplié par a^3 pris $n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}$ fois, ou $n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\,a^3\,x^{n-3}$; et ainsi de suite. Donc $(x+a)^n = x^n + n\,a\,x^{n-1} + n.\frac{n-1}{2}\,a^2\,x^{n-2} + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\,a^3\,x^{n-3} + \ldots + n.\frac{n-1}{2}\,a^{n-2}\,x^2 + n\,a^{n-1}\,x + a^n$.

De l'extraction des Racines des quantités numériques.

100. La démonstration précédente est fondée sur la supposition que n est un nombre entier positif. Il faudra résoudre le problême pour toutes les valeurs de n. Mais nous croyons nécessaire de nous arrêter un instant à l'extraction des racines des quantités numériques.

Si on proposoit d'élever le nombre 47 au quarré,

on le regarderoit comme composé de deux parties, de quatre dixaines et de sept unités; et son quarrré seroit composé du quarré des dixaines, ou de 16 suivi de deux zèros, du double des dixaines par les unités, ou de 56

47
1600
560
49
2209

suivi d'un zéro, et du quarré des unités, qui est 49 : en ajoutant ces trois quantités, on trouveroit 2209 pour le quarré de 47.

Réciproquement pour extraire la racine quarrée de 2209, on mettra, comme on a fait pour la division, un crochet à la droite du nombre proposé, et on tirera une barre horisontale, au-dessus de laquelle on écrira les chiffres de la racine à mesure qu'on les trouvera. Cela fait, comme le quarré du nombre

22|09	47
16	87
609	
609	
0	

des dixaines doit avoir deux chiffres à sa droite, on séparera par une barre deux chiffres de la droite du nombre proposé, et le quarré du nombre des dixaines sera le plus grand quarré contenu dans les chiffres situés à gauche de la barre. On dira : le plus grand quarré contenu dans 22 est 16, dont la racine est 4; ôtant 16 de 22, il reste 6, auprès duquel on descendra les deux nombres qui sont à la droite de la barre, et 609 renfermera le double des dixaines par les unités, plus le quarré des unités. Mais le nombre qui exprime le double des dixaines par les unités doit avoir un chiffre à sa droite; il est donc compris dans 60, qu'il faudra diviser par le double 8 du nombre des dixaines pour avoir les unités. On écrira 8 au-dessous de la ligne horisontale; et ayant divisé 60 par 8, ce qui donne 7, on mettra 7 à la racine au rang des unités, et au-dessous de la ligne horisontale à la droite de 8. On multipliera

87 par 7, et si ce produit est exactement égal à 609, le nombre 47 sera la racine quarrée demandée.

Si j'avois eu à extraire la racine quarrée de 2210, j'aurois trouvé un reste 1, ce qui m'auroit fait voir que le nombre proposé n'est pas un quarré parfait. On ne peut en avoir la racine que par approximation, au moyen de décimales, comme on a fait pour la division; toutes fois avec cette différence qu'il faudra mettre deux zéros à la droite du reste pour avoir une décimale à la racine, quatre zéros pour en avoir deux, six pour en avoir trois, etc.; toujours par la raison que le quarré du nombre des dixaines doit avoir deux chiffres à sa droite, que le quarré du nombre des centaines en doit avoir quatre, etc.

22|10	)	47,0106...
16	(	87
610		9401
609		940106
10000		
9401		
5990000		
5641236		
348764		

Pour avoir des dixièmes, je mets deux zéros à la droite des 1; et, parce que le nombre qui exprime le double des dixaines par les unités doit avoir un chiffre à sa droite, 10 doit être divisé par le double de 47, ou par 94. Le diviseur étant plus grand que le dividende, on écrira 0 à la racine, ce qui fait voir qu'elle ne doit pas contenir de dixièmes. Pour trouver les centièmes, on mettra deux autres zéros à la droite de 1, on divisera

1000 par 940, ou 100 par 94; ce qui donnera 1, qu'on écrira à la racine et au-dessous de la barre horisontale à la droite de 940. On multipliera 9401 par 1, et on retranchera le produit de 10000; ce qui donnera un reste 599, à la droite duquel on mettra deux zéros pour avoir les millièmes. On doublera 4701; et, comme ce double 9402 ne peut pas être contenu dans 5990, on mettra 0 à la racine. On procédera ensuite à la recherche des dix-millièmes, et pour y parvenir on mettra deux autres zéros à la droite de 599; on divisera 599000 par 94020, ou 59900 par 9402; ce qui donnera 6 pour le nombre des dix-millièmes de la racine. On écrira aussi 6 sous la barre horisontale à la droite de 94020; et, le produit de 94206 par 6 étant ôté de 5990000, il restera 348764, à la droite duquel on mettroit deux zéros si l'on desiroit une décimale de plus à la racine.

101. On propose pour second exemple d'extraire la racine quarrée de 5, et de pousser l'approximation jusqu'à la septième décimale.

5|00|00|00|00|00|00	2,236067
100	42
84	443
1600	4466
1329	447206
27100	4472127
26796	
3040000	
2683236	
35676400	
31304889	
4371511	

On trouveroit pour septième décimale 9 ; ainsi nous arrêtant à la sixième, nous prendrons 2,236068 pour la racine de 5 la plus approchée, lorsqu'elle ne doit comprendre que six décimales. En multipliant cette racine par elle-même, on trouve 5,000000100624 qui diffère bien peu de 5. On peut donc au moyen des décimales approcher de la racine quarrée d'un nombre aussi près qu'on voudra. De plus, toute fraction décimale pouvant être réduite en fraction continue (n°. 71 et suivans), lorsqu'on aura la racine approchée d'un nombre en fraction décimale, on pourra toujours la convertir en fraction continue.

102. On demande le cube de 47, considéré comme composé de deux parties, de quatre dixaines et de sept unités. Ce cube comprend, le cube des dixaines, ou 64 suivi de trois zéros ; le triple du quarré des dixaines multiplié par les unités, ou 336 suivi de deux zéros ; le triple des dixaines par le quarré des unités, ou 588 suivi d'un zéro ; enfin, le cube des unités, ou 343 : la somme de ces trois quantités, ou 103823 est le cube de 47.

47

64000
33600
5880
343

103823

Réciproquement, pour extraire la racine cubique de 103823, on mettra un crochet à la droite du nombre proposé, on tirera ensuite une barre horisontale au-dessus de laquelle on écrira les chiffres de la racine à mesure qu'on les trouvera. Et comme le cube du nombre des dixaines doit avoir trois chiffres à sa droite, on separera les trois chiffres 823 par une barre verticale. On

103|823) 47

64 (48

39823

33600
5880
343

39823
00000

cherchera le plus grand cube contenu dans 103 : ce cube est 64, qui a pour racine 4, qu'on écrira à la racine ; on ôtera 64 de 103, et on aura un reste 39 à la droite duquel on descendra 823. Alors 39823 comprendra le triple du quarré des dixaines par les unités, le triple des dixaines par le quarré des unités, et le cube des unités. Le triple du quarré des dixaines par les unités devant avoir deux chiffres à sa droite, sera compris dans 398 ; on divisera donc ce nombre par le triple du quarré des dixaines, ou par 48, pour avoir les unités. Le nombre des unités se trouve être 7, qu'on écrira à la racine. On multipliera 48 par 7, et on aura 336, qu'on écrira dessous 39823, en laissant deux places à droite ; on multipliera le triple des dixaines 12 par le quarré des unités 49, et on aura 588, qu'on écrira dessous 39823, en laissant une place à droite ; on élevera les unités au cube, et on aura 343, qu'on écrira dessous le même nombre sans laisser de place à droite : on ajoutera ensemble les trois nombres qu'on vient d'écrire ; et, comme la somme qu'on trouvera est exactement 39823, on sera certain que 47 est la racine du nombre proposé.

S'il y avoit un reste, on mettroit à sa droite trois zéros pour avoir des dixièmes à la racine, six zéros pour avoir des centièmes, et ainsi de suite.

103. Nous demanderons encore de trouver la racine cubique de 9 avec quatre décimales.

9|000|000|000|000	2,08008
8	12
1000000	1200
960000	1297920000
38400	
512	
998912	
1088000000000	
1038336000000	
39936000	
512	
1038375936512	
49624063488	

S'il s'agissoit d'une racine quatrième, cinquième, etc., l'opération se feroit de la même manière, au moyen des formules qui résulteroient de l'élévation de $a+b$ à la quatrième puissance, à la cinquième puissance, etc. Mais nous allons présenter le problème sous un autre point de vue.

104. Soit un nombre composé de deux parties, m et n, soit aussi $m > n$, on fera $\frac{n}{m} = x$, et $m+n = m(1+x)$. La racine quarrée de ce nombre est $\sqrt{m}\sqrt{1+x}$; pour trouver $\sqrt{1+x}$, on fera usage de la méthode des indéterminées, qui abrégera beaucoup le calcul. On supposera

$$\sqrt{1+x} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.},$$

et élevant les deux membres au quarré, on aura l'équation identique

$$\begin{array}{llllll} 2Ax + 2Bx^2 + & 2Cx^3 + & 2Dx^4 + & 2Ex^5 \\ -1 + A^2 + 2AB & + 2AC & + 2AD \\ & + B^2 & + 2BC, \\ + \text{etc.} = 0, \end{array}$$

de laquelle on tirera

$$2A - 1 = 0,\ 2B + A^2 = 0,\ C + AB = 0,$$
$$2D + 2AC + B^2 = 0,\ E + AD + BC = 0, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{8},\ C = \tfrac{1}{16},\ D = -\tfrac{5}{128},\ E = \tfrac{7}{256}, \text{ etc.}$$

On aura donc

$$\sqrt{m+n} = \sqrt{m}\left(1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{n}{m} - \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{n}{m}\right)^2 + \tfrac{1}{16}\left(\tfrac{n}{m}\right)^3 - \tfrac{5}{128}\left(\tfrac{n}{m}\right)^4 + \tfrac{7}{256}\left(\tfrac{n}{m}\right)^5 - \text{etc.}\right).$$

Pour trouver la racine quarrée de 5, on fera dans cette formule $m = 4$, $n = 1$, et on aura $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4.4^2} + \frac{1}{8.4^3} - \frac{1}{64.4^4} + \frac{7}{128.4^5} -$ etc. La somme de ces six premiers termes est $2 + \frac{30943}{131072}$, qui, réduite en fraction décimale, donne 2,23607, laquelle ne diffère de celle trouvée (n° 101) qu'à la cinquième décimale; elle différeroit moins si nous avions pris un plus grand nombre de termes de la série.

105. On propose d'extraire la racine cubique de $m + n$. On aura $\sqrt[3]{m+n} = \sqrt[3]{m}\ \sqrt[3]{1+x}$. On fera

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.};$$

et, élevant les deux membres au cube, on formera l'équation identique

$$\begin{array}{llllll} 3Ax + 3Bx^2 + & 3Cx^3 + & 3Dx^4 + & 3Ex^5 \\ -1 \quad +3A^2 & +6AB & +6AC & +6AD \\ \quad +A^3 & +3B^2 & +6BC \\ & +3A^2B & +3A^2C \\ & & +3AB^2 \end{array}$$

$$+ \text{etc.} = 0,$$

de laquelle on tirera ces équations particulières,

$$3A - 1 = 0, \quad B + A^2 = 0, \quad 3C + 6AB + A^3 = 0,$$

$$D + 2AC + B^2 + A^2B = 0,$$

$$E + 2AD + 2BC + A^2C + AB^2 = 0, \text{ etc.},$$

partant

$$A = \tfrac{1}{3}, \quad B = \tfrac{-1}{9}, \quad C = \tfrac{5}{9.9.}, \quad D = \tfrac{-10}{3.9.9.}$$

$$E = \tfrac{22}{9.9.9}, \text{ etc.}$$

On aura donc pour la racine cubique de $m + n$,

$$\sqrt[3]{m}\left(1 + \tfrac{1}{3}\tfrac{n}{m} - \tfrac{1}{9}\left(\tfrac{n}{m}\right)^2 + \tfrac{5}{9^2}\left(\tfrac{n}{m}\right)^3 - \tfrac{10}{3.9^2}\left(\tfrac{n}{m}\right)^4 + \tfrac{22}{9^3}\left(\tfrac{n}{m}\right)^5 - \text{etc.}\right).$$

Pour trouver la racine cubique de 9, on fera dans cette formule $m = 8$, $n = 1$, et on aura

$$2 + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{9.8} + \tfrac{5}{9^2.8^2} - \tfrac{10}{3.9^2.8^3} + \tfrac{22}{9^3.8^4} - \text{etc.}\right).$$

On trouve pour la somme des six premiers termes de cette série, $2 + \frac{9165\,18}{11943936}$, qui, réduite en fraction décimale, donne 2,08008.....

De l'élévation aux puissances, quels que soient les exposans de ces puissances.

106. Nous voyons déjà que le problême dépend de pouvoir élever une série de cette forme,

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.},$$

à une puissance qui soit un nombre entier positif. Soit n ce nombre, faisons aussi

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.} = u ;$$

on aura à développer $(1 + xu)^n$. Or, nous avons trouvé (n° 99),

$$(1 + xu)^n = 1 + nxu + n.\frac{n-1}{2}x^2u^2 +$$

$$n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^3u^3 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}x^4u^4 + \text{etc.};$$

de plus

$$u^2 = A^2 + 2ABx + 2ACx^2 + 2ADx^3 + \text{etc.},$$
$$+ B^2 + 2BC$$

$$u^3 = A^3 + 3A^2Bx + 3A^2Cx^2 + \text{etc.},$$
$$+ 3AB^2$$

$$u^4 = A^4 + 4A^3Bx + \text{etc.},$$

$$u^5 = A^5 + \text{etc.} ;$$

etc.

donc $(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.})^n =$

$$1 + nAx + (nB + n.\frac{n-1}{2}A^2)x^2 + (nC + n.\frac{n-1}{2}2AB + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}A^3)x^3 + (nD + n.\frac{n-1}{2}(2AC + B^2) + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}3A^2B + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}A^4)x^4 + (nE + n.\frac{n-1}{2}$$

$2(AD+BC)+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}3(A^2C+AB^2)+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}4A^3B+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\frac{n-4}{5}A^5)x^5+$ etc.

107. Cela posé, m étant un nombre entier positif ou négatif, on demande de développer $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ en une série de cette forme $1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ etc. On aura $(1+x)^m=(1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+$ etc.$)^n$.

Mais (n°s. 95 et 96) m étant positif ou négatif,

$(1+x)^m=1+mx+m.\frac{m-1}{2}x^2+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^3+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-4}{4}x^4+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}x^5+$ etc; on aura donc, à cause de l'identité des deux membres de l'équation $(1+x)^m=(1+Ax+$ etc.$)^n$,

$nA=m$, $nB+n.\frac{n-1}{2}A^2=m.\frac{m-1}{2}$, $nC+n.\frac{n-1}{2}2AB+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}A^3=m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$, $nD+n.\frac{n-1}{2}(2AC+B^2)+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}3A^2B+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}A^4=m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}$, $nE+n.\frac{n-1}{2}2(AD+BC)+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}3(A^2C+AB^2)+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}4A^3B+n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.\frac{n-4}{5}A^5=m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}.\frac{m-4}{5}$, etc.

On tire de ces équations $A = \frac{m}{n}$, $B = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n}$, $C = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n}$, $D = \frac{m}{n} \cdot \frac{m}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} \cdot \frac{m-3n}{4n}$, $E = \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} \cdot \frac{m}{4n} \cdot \frac{3n}{5n} \cdot \frac{m-4n}{5n}$, etc.

108. Pour élever $p + q$ à la puissance $\frac{m}{n}$, on fera $\frac{q}{p} = x$, ou $q = px$: et si, pour abréger, on désigne par M, N, P, Q, R, etc. les termes successifs de la série qu'il s'agit de trouver, on aura

$$(p + px)^{\frac{m}{n}} = p^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} Mx + \frac{m-n}{2n} Nx + \frac{m-2n}{3n} Px + \frac{m-3n}{4n} Qx + \frac{m-4n}{5n} Rx + \text{etc.};$$

c'est sous cette forme très-simple que ce théorême a été donné par Newton. Lorsque l'exposant ne sera pas un nombre entier positif, la série ne pourra se terminer, et il suffira pour qu'elle soit convergente de prendre $p > q$, ce qu'on pourra toujours faire.

109. On propose d'élever à la puissance $\frac{m}{n}$ une suite $p + q + r + s + \text{etc.}$, ou $p > q, q > r, r > s$, etc.; on supposera $\frac{q}{p} = x$, $\frac{r}{p} = ax^2$, $\frac{s}{p} = bx^3$, etc., et on aura à élever à la puissance $\frac{m}{n}$,

$p(1 + x + ax^2 + bx^3 + \text{etc.})$. On fera $1 + ax + bx^2 + cx^3 + \text{etc.} = z$, et cette puissance sera

$$p^{\frac{m}{n}} \left[1 + \frac{m}{n} xz + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} x^2 z^2 + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{2n} \cdot \frac{m-2n}{3n} x^3 z^3 + \frac{m}{n} \cdot \frac{m-n}{n} \cdot \frac{m-2n}{3n} \cdot \frac{m-3n}{4n} x^4 z^4 + \text{etc.} \right],$$

où il faudra mettre pour z, z^2, z^3, etc., leurs valeurs. Ces substitutions faites, on aura

$$p^{\frac{m}{n}}\left[1+\frac{m}{n}x+\left(\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}\right)x^2+\left(\frac{m}{n}b+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}2a+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}.\frac{m-2n}{3n}\right)x^3+\left(\frac{m}{n}c+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}(2b+a^2)+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}.\frac{m-2n}{3n}3a+\frac{m}{n}.\frac{m-n}{2n}.\frac{m-2n}{3n}.\frac{m-3n}{4n}\right)x^4+\text{etc.}\right].$$

Nous ferons sur cette formule la même remarque que sur les précédentes; elle aura un nombre fini de termes, toutes les fois que $\frac{m}{n}$ sera un nombre entier positif. Lorsque $p+q+r+s+$ etc., sera une suite infinie, la formule dont il s'agit donnera la suite infinie qui en est la puissance, quelle que soit cette puissance.

De l'extraction des Racines des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables.

110. On appelle incommensurables toute quantité telle que $R^{\frac{m}{n}}$ ou $\sqrt[n]{R^m}$ qui ne peut prendre une forme rationelle qu'étant développée en suite infinie.

Pour trouver la racine quarrée du binome $A+\sqrt{B}$, dont le second terme est incommensurable, on supposera cette racine $=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, et on aura $A+\sqrt{B}=x+y+2\sqrt{xy}$. Mais x et y étant indéterminés, je puis partager comme il me plait l'équation précédente, et former ces deux-ci: $A=x+y$, $\sqrt{B}=2\sqrt{xy}$ ou $B=4xy$. Ces équations donnent $y=A-x$, et pour déterminer x l'équation du second degré $x^2-Ax=-\frac{B}{4}$, de laquelle on tire (n°. 52),

$$x=\frac{A}{2}\pm\frac{\sqrt{A^2-B}}{2},\ y=\frac{A}{2}\mp\frac{\sqrt{A^2-B}}{2};$$

où, si l'on convient de donner le signe $+$ au second terme

terme de la valeur de x, on donnera le signe — au second terme de valeur de y, et on aura

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{A+\sqrt{A^2-B}} + \sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}\right].$$

La solution seroit illusoire, et nous aurions répondu que la racine quarrée d'une quantité en partie commensurable et en partie incommensurable, est la racine quarrée d'une quantité en partie commensurable et en partie incommensurable, si $A^2 - B$ n'étoit un quarré parfait. Or, il est un quarré parfait; car on a $A^2 = x^2 + 2xy + y^2$, $B = 4xy$, et, retranchant la seconde équation de la première, $A^2 - B = x^2 - 2xy + y^2$, dont le second membre est évidemment un quarré parfait.

Je prendrai pour exemple $12 + 2\sqrt{35}$. Dans ce cas $A = 12$, $B = 140$, $A^2 - B = 4$; partant

$$\sqrt{12+2\sqrt{35}} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{14}+\sqrt{10}] = \sqrt{7}+\sqrt{5}.$$

Nous remarquerons que de

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{y}}, \text{ on tire } \sqrt{x}+\sqrt{y} = \frac{\sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2}\sqrt{A-\sqrt{A^2-B}}};$$

que de $\sqrt{y} = \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{x}}$, on tire $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \frac{\sqrt{A+\sqrt{A^2-B}}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2}\sqrt{A+\sqrt{A^2-B}}}$;

et nous ferons souvent usage de ces sortes de transformations.

111. Pour trouver la racine cubique de $A+\sqrt{B}$, on supposera $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}=x+y$,

$\sqrt[3]{A-\sqrt{B}}=x-y$, d'où $x^2-y^2=\sqrt[3]{A^2-B}$.

Mais

$$A+\sqrt{B}=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$
$$A-\sqrt{B}=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3;$$

on en tire, en ajoutant ensemble ces équations, retranchant ensuite la seconde de la première,

$$A=x^3+3xy^2,\ \sqrt{B}=3x^2y+y^3.$$

Donc $x^2=\frac{\sqrt{B}-y^3}{3y}$, $y^2=\frac{A-x^3}{3x}$;

en substituant successivement ces valeurs dans l'équation $x^2-y^2=\sqrt[3]{A^2-B}$, il en résulte deux équations du troisième degré,

$$4x^3-3x\sqrt[3]{A^2-B}=A,$$
$$4y^3+3y\sqrt[3]{A^2-B}=\sqrt{B},$$

qui renferment les valeurs de x et y. Mais il suffira de résoudre une de ces équations, car l'une des quantités x ou y étant déterminée, l'autre le sera facilement.

Nous prendrons pour exemple $7+5\sqrt{2}$, dont nous démanderons la racine cubique. Nous aurons

$A = 7, B = 50, A^2 - B = -1, \sqrt[3]{A^2 - B} = -1,$

et les deux équations du troisième degré,

$$4x^3 + 3x = 7, \quad 4y^3 - 3y = 5\sqrt{2}.$$

En leur donnant la forme suivante,

$$x = \frac{7}{4x^2+3}, \quad y = \frac{5\sqrt{2}}{4y^2-3},$$

je vois que le problême est réduit à prendre pour x un nombre tel, qu'en divisant 7 par quatre fois le quarré de ce nombre augmenté de trois unités, on ait au quotient le même nombre. Si je prends $x = 1$, j'aurai $4x^2 + 3 = 7$; et la condition, pour que la valeur prise pour x soit la racine de l'équation du troisième degré, est satisfaite. En prenant $y = \sqrt{2}$, je trouve $\frac{5\sqrt{2}}{4y^2-3} = \sqrt{2}$, qui me fait voir aussi que la valeur prise pour y est la racine de l'équation du troisième degré qui renferme cette indéterminée.

112. Ainsi, l'équation définitive étant $x^3 - px = q$, on en tire $x = \frac{q}{x^2-p}$; et toutes les fois qu'on pourra trouver un quarré, duquel, retranchant p, on ait un reste qui divise exactement q, et donne au quotient la racine de ce quarré, cette racine sera aussi la valeur de x. Lorsque cette valeur de x doit être rationelle, le calcul n'exige pas un très-long tâtonnement, comme on le verra dans les exemples qui vont suivre.

Soit $x^3 - 19x + 30 = 0$, on en tirera $x = \frac{-30}{x^2-19}$. J'essaie successivement les quarrés 1, 4, 9, 16, 25 ..... et prenant d'abord 4, j'ai $x^2 - 19 = -15$, qui divise exactement -30, et donne au quotient 2

racine quarrée de 4. Donc 2 est une valeur de x. Je prends ensuite 9; et parce que $x^2 - 19 = -10$ divise exactement -30 et donne au quotient 3, racine quarrée de 9, je vois que 3 est une seconde valeur de x. En prenant 16, on trouve $16 - 19 = -3$, qui divise exactement -30; mais comme le quotient 10 n'est pas la racine quarrée de 16, cette supposition ne satisfait pas à la question. Il en est tout autrement de 25, qui donne $x^2 - 19 = 6$; car 6 divise exactement -30, et donne au quotient -5, qui est une des racines de 25. Donc -5 est une troisième valeur de x. Les autres quarrés que je puis essayer ne satisfont pas, et je ne trouve que ces trois valeurs de x, $x = 2$, $x = 3$, $x = -5$; il en résulte aussi que le quatrinome $x^3 - 19x + 30$ est le produit des trois facteurs $(x-2)(x-3)(x+5)$.

Soit encore $x^3 - 193x = 1008$, d'où l'on tire $x = \frac{1008}{x^2 - 193}$. En essayant les quarrés 49, 81, 256, on trouve pour $x^2 - 193$ ces trois nombres -144, -112, 63 qui divisent exactement 1008. Les quotiens -7, -9, 16 étant les racines de 49, 81, 256, il s'en suit que ces trois valeurs de x, $x = -7$, $x = -9$, $x = 16$ satisfont à l'équation du 3e degré, et en même temps que le quatrinome $x^3 - 193x - 1008$ est le produit des trois facteurs

$$(x+7)(x+9)(x-16).$$

113. L'équation $x^3 - 320x = 2541$, donne $x = \frac{2541}{x^2 - 320}$. Le seul quarré 441, dont la racine est 21, satisfait. On en tire $x^2 - 320 = 121$, qui divise exactement 2541, et donne 21 au quotient. N'y auroit-il d'autres valeurs de x, que $x = 21$, qui satisfassent à la proposée? Mais je puis trouver les deux

autres facteurs du quatrinome $x^3 - 320x - 2541$, en divisant ce quatrinome par $x - 21$. Il vient au quotient $x^2 + 21x + 121$, lequel trinome n'a pour facteurs binomes (n° 52) que $x + \frac{21}{2} \mp \frac{\sqrt{43}}{2}\sqrt{-1}$. Ainsi, l'équation du troisième degré dont il s'agit n'a qu'une seule racine réelle, $x = 21$; les deux autres,

$$x = -\frac{21}{2} - \frac{\sqrt{43}}{2}\sqrt{-1}, \quad x = -\frac{21}{2} + \frac{\sqrt{43}}{2}\sqrt{-1},$$

sont imaginaires.

Les équations du troisième degré qui n'ont que deux termes, et qu'on peut représenter par $x^3 = q$, sont toutes dans ce cas-là. En effet, en divisant $x^3 - q$ par $x - \sqrt[3]{q}$, on trouve au quotient

$$x^2 + x\sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{q^2}.$$

Or, l'équation du second degré $x^2 + x\sqrt[3]{q} = -\sqrt[3]{q^2}$ étant résolue, donne

$$x = -\frac{\sqrt[3]{q}}{2} \mp \sqrt{\frac{\sqrt[3]{q^2}}{4} - \sqrt[3]{q^2}} =$$

$$-\frac{\sqrt[3]{q}}{2} \pm \frac{\sqrt[3]{q}}{2}\sqrt{-3} = -\frac{\sqrt[3]{q}}{2}(1 \mp \sqrt{-3}),$$

où $\sqrt{-3}$ est une quantité imaginaire. Il est donc clair que $x^3 = q$ n'a qu'une seule racine réelle $x = \sqrt[3]{q}$, les deux autres sont imaginaires. Mais, sans nous arrêter plus long-temps à des cas particuliers, nous allons nous occuper de la théorie générale des équations, l'une des plus importantes de toute l'Analyse mathématique.

TROISIÈME PARTIE.

De la résolution des Équations déterminées.

114. Nous avons vu que de la multiplication d'un nombre n de facteurs $x+a, x+b, x+c, x+d$, etc., il devoit résulter un multinome

$$x^n + p x^{n-1} + q x^{n-2} + r x^{n-3} + \ldots\ldots + u,$$

où p est égal à la somme des lettres $a+b+c+d$ + etc., q à la somme des produits $ab+ac+bc$ + etc. de ces lettres multipliées deux à deux, r à la somme $abc+abd+bcd+$ etc. de ces lettres multipliées trois à trois, et ainsi de suite jusqu'au dernier terme u, qui est égal au produit de toutes les lettres. En égalant un des facteurs quelconque à zéro, on rendra le multinome nul : réciproquement, ayant l'équation

$$x^n + p x^{n-1} + q x^{n-2} + r x^{n-3} + \ldots\ldots + u = 0,$$

si on parvient à décomposer son premier membre en facteurs binomes $x+a, x+b, x+c, x+d$, etc., chacune des valeurs de x tirées de $x+a=0, x+b=0, x+c=0, x+d=0$, etc., satisferont à la proposée, et en seront les racines. Ces racines étant $-a, -b, -c, -d$, etc., il est clair que p, ou le coefficient du second terme d'une équation quelconque, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines ; que q est égal au produit des racines multi-

pliées deux à deux; que r, pris avec un signe contraire est égal au produit des racines multipliées trois à trois, et ainsi de suite, jusqu'au dernier terme u, qui est égal au produit de toutes les racines, étant pris avec le même signe, si n est pair, et avec un signe contraire, si n est impair.

115. Mais si toutes les racines doivent satisfaire à l'équation proposée, chacune d'elles sera donnée par une équation de la forme de cette proposée. En effet, ces racines étant représentées par a, b, c, d, etc., lorsque $n = 3$, on a $-p = a+b+c$, $q = ab + ac + bc$, $-r = abc$; partant $-pa^2 = a^3 + a^2b + a^2c$, $qa = a^2b + a^2c + abc$, $-r = abc$. On tire de ces équations $a^3 + pa^2 + qa + r = a^3 - a^3 - a^2b - a^2c + a^2b + a^2c + abc - abc = 0$, équation de la forme de la proposée. En opérant de la même manière sur b et c, on obtiendra des résultats semblables.

Lorsque $n = 4$, on a $-p = a + b + c + d$, $q = ab + ac + ad + bc + bd + cd$, $-r = abc + abd + acd + bcd$, $s = abcd$; partant $-pa^3 = a^4 + a^3b + a^3c + a^3d$, $qa^2 = a^3b + a^3c + a^3d + a^2bc + a^2bd + a^2cd$, $-ra = a^2bc + a^2bd + a^2cd + abcd$, $s = abcd$. On tire de ces équations $a^4 + pa^3 + qa^2 + ra + s = a^4 - a^4 - a^3b - a^3c - a^3d + a^3b + a^3c + a^3d + a^2bc + a^2bd + a^2cd - a^2bc - a^2bd - a^2cd - abcd + abcd = 0$, équation de la forme de la proposée. Il n'est pas nécessaire de pousser plus loin ces calculs pour se convaincre de la vérité de la proposition énoncée.

116. On voit avec la même évidence que, lorsque les racines sont toutes positives, les termes de l'équation ont alternativement les signes + et —; que tous les termes ont le signe +, lorsque les racines sont négatives. On en conclut qu'autant de fois les signes changent, autant l'équation a de racines positives, et qu'autant de

fois les mêmes signes se succèdent, autant elle a de racines négatives. Il ne s'agit dans ce moment que de racines réelles, nous nous occuperons plus loin des racines imaginaires. Je prendrai pour exemple l'équation du sixième degré

$$x^6 - x^5 - 27x^4 + 25x^3 + 194x^2 - 144x - 288 = 0,$$

qui a trois racines positives 2, 3, 4, et trois racines négatives -1, -3, -4; aussi le premier terme et le second, le troisième et le quatrième, le cinquième et le sixième, ont-ils des signes différens; aussi le second terme et le troisième, le quatrième et le cinquième, le sixième et le septième, ont-ils les mêmes signes.

Si les changemens de signes viennent des racines positives, et les permanences des racines négatives, en multipliant une équation par un binome tout positif, tel que $x + 5$, il y aura autant de changemens de signes dans le produit qu'il y en a dans la proposée; au contraire, si on la multiplie par $x - 5$, il y aura autant de permanences dans le produit que dans la proposée. Je multiplie l'équation du sixième degré, successivement par $x + 5$ et par $x - 5$, et il me vient les équations du septième degré

$$x^7 + 4x^6 - 32x^5 - 110x^4 + 319x^3 + 826x^2 - 1008x - 1440 = 0,$$

$$x^7 - 6x^6 - 22x^5 + 160x^4 + 69x^3 - 1114x^2 + 432x + 1440 = 0,$$

dans la première desquelles il y a autant de changemens de signes, et dans la seconde autant de permanences que dans l'équation du sixième degré. Ce théorême nous sera utile dans la recherche des diviseurs commensurables des équations.

Des Diviseurs commensurables des équations.

117. Le dernier terme d'une équation étant le produit de toutes les racines, aucun nombre ne peut être une valeur commensurable de x dans une équation, qu'autant qu'il sera diviseur exact du dernier terme. On prendra tous les diviseurs du dernier terme, et les substituant successivement, tant en $+$ qu'en $-$, au lieu de x dans la proposée, ceux qui satisferont à cette équation en seront les racines commensurables. Or, ce tâtonement peut être beaucoup abrégé par les considérations qui précèdent, comme on le verra par les exemples qui vont suivre.

Et d'abord pour trouver les diviseurs commensurables de l'équation du quatrième degré

$$x^4 - x^3 - 19x^2 + 49x - 30 = 0,$$

je cherche les diviseurs de 30 de la manière suivante. Je divise 30 par 2, et je trouve 15; je divise ensuite 15 par 3, et je trouve 5; ayant les diviseurs premiers, je les combine deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., pour avoir tous les autres. Dans cet exemple où il n'y a que trois diviseurs premiers 2, 3, 5, on ne peut les combiner que deux à deux, et trois à trois. En les combinant deux à deux, on trouve 6, 10, 15; trois à trois, on trouve 30; 30 n'a donc d'autres diviseurs que ceux-ci: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Il faut les substituer successivement tant en $+$ qu'en $-$ dans l'équation du quatrième degré. Mais, comme dans cette équation il y a trois changemens de signes et une seule permanence, elle ne peut avoir qu'une seule racine négative et trois positives. Je mets $+1$, $+2$, $+3$, au lieu de x; par chacune de ces substitutions tous les termes sont détruits, et on a satisfait à l'équation; j'en conclus que $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, sont

trois des valeurs de x. L'équation est encore satisfaite par la substitution de -5; $x = -5$ est donc la quatrième valeur de x.

118. On demande les diviseurs commensurables de l'équation du troisième degré

$x^3 + x^2 - 34x + 56 = 0$, qui, à cause de deux changemens de signes et d'une seule permanence, doit avoir deux racines positives et une négative. Pour y parvenir on cherchera les diviseurs de 56, premièrement en divisant 56 par 2, ce qui donne 28; en divisant 28 par 2, ce qui donne 14; en divisant 14 par 2, ce qui donne 7. On trouve donc ces quatre diviseurs premiers 2, 2, 2, 7, qui, multipliés deux à deux, donnent 4, 4, 14, 4, 14, 14; qui, multipliés trois à trois, donnent 8, 28, 28, 28; qui, multipliés tous les quatre, donnent 56. Ce nombre a donc pour diviseurs 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56. Les seuls nombres, qui, pris avec le signe $+$, satisfassent à la proposée, sont: $+2$ et $+4$. Il reste à trouver parmi les diviseurs un troisième nombre, qui, pris avec le signe $-$, satisfasse aussi; ce nombre étant -7, les racines de l'équation du troisième degré sont: $+2$, $+4$ et -7.

119. On peut quelquefois rendre l'opération plus simple par des préparations que la nature du problème indique. Si on proposoit $x^3 + 18x^2 + 72x = 7280$, il seroit bien long de chercher tous les diviseurs de 7280. Mais parmi ces diviseurs il peut se trouver un nombre cube. Le nombre 8, qui est le cube de 2, divise 7280, et donne au quotient 910; or, si l'on fait $x = 2y$, $x^2 = 4y^2$, $x^3 = 8y^3$, la proposée deviendra $8y^3 + 18.4y^2 + 72.2y = 910.8$, dont on peut diviser tous les termes par 8, ce qui la change en celle-ci: $y^3 + 9y^2 + 18y - 910 = 0$, qui n'a qu'une seule racine positive. Maintenant les diviseurs premiers de 910 sont 2, 5, 7, 13, qui, multipliés

deux à deux, donnent 10, 14, 26, 35, 65, 91; trois à trois, donnent 70, 130, 455, 182; ainsi les diviseurs de 910 sont 1, 2, 5, 7, 10, 13, 14, 26, 35, 65, 70, 91, 130, 182, 455, 910, parmi lesquels il n'y a que 7 pris positivement, qui satisfasse. L'équation $y^3 + 9y^2 + 18y = 910$, n'a donc de racine commensurable que $x = 7$. Pour trouver les deux autres quelles qu'elles soient, on diviseta $y^3 + 9y^2 + 18y - 910$ par $y - 7$, et on aura au quotient $y^2 + 16y + 130$. Mais en résolvant l'équation $y^2 + 16y = -130$, on trouve $y = -8 \pm \sqrt{-66}$, c'est-à-dire, que les deux autres valeurs de y sont imaginaires. Nous concluons donc que l'équation $x^3 + 18x^2 + 72x = 7280$, n'a qu'une seule racine réelle $x = 14$, et que cette racine est commensurable.

120. Nous proposerons pour dernier exemple la question suivante. Plusieurs négocians ont en commun un capital de 8240 francs; chacun y ajoute autant de fois 40 francs qu'ils sont d'associés, et avec la somme totale ils gagnent autant de francs pour cent, sur lequel profit chacun ayant pris dix fois autant de francs, toujours qu'ils sont d'associés, il reste 224 francs; on demande quel étoit leur nombre. En nommant x ce nombre, chacun aura ajouté $40x$ francs au capital 8240 liv., et tous ensemble ils auront augmenté ce capital de $40x^2$ francs. Avec le nouveau capital $40x^2 + 8240$, ils gagnent x francs pour cent; le gain total est donc $\frac{40x^3}{100} + \frac{8140x}{100} = \frac{2x^3}{5} + \frac{412x}{5}$. De cette somme, chacun prélevant $10x$, et tous ensemble $10x^2$, il restera $\frac{2x^3}{5} + \frac{412x}{5} - 10x^2$, lequel reste est égal à 224. On a donc l'équation $x^3 - 25x^2 + 206x - 560 = 0$, dans laquelle il y a trois changemens

de signes; d'où il suit que si les trois racines sont réelles, toutes trois doivent être positives. Si ces trois racines sont commensurables, pour les trouver, on essayera successivement les diviseurs 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, etc. de 560, en les prenant avec le signe +, et on trouvera de cette manière pour les trois valeurs de x, $x = 7$, $x = 8$, $x = 10$. Il peut donc y avoir, ou 7 associés, ou 8, ou 10; ces trois nombres satisfont également au problême.

Des Racines égales des Equations.

121. On appelle racines égales d'une équation, celles qui, ayant le même signe, sont exprimées par le même nombre; ainsi le produit de i racines égales, n'est autre chose que la puissance i d'une de ces racines.

Si une équation a i racines égales, on peut la représenter par $P(x+a)^i = 0$, P étant le produit de toutes les racines inégales. Supposons d'abord que toutes les racines soient égales, on aura une équation de cette forme (A) .....

$x^i + i\,a\,x^{i-1} + i.\frac{i-1}{2}\,a^2\,x^{i-2} + i.\frac{i-1}{2}.\frac{i-2}{3}\,a^3\,x^{i-3}$

$+ \ldots + a^i = 0$. Je multiplie chaque terme de l'équation A par l'exposant qu'a x dans ce terme, et par conséquent le dernier terme par 0; ensuite de quoi je diminue l'exposant de chacun des termes d'une unité, ce qui me donne (B).....

$i\,x^{i-1} + i.\overline{i-1}.a\,x^{i-2} + i.\overline{i-1}.\frac{i-2}{2}\,a^2\,x^{i-3}$

$+ \ldots + i\,a^{i-1} = 0$. J'opère sur l'équation B comme sur l'équation A, et il me vient (C).....

$i.\overline{i-1}.x^{i-2} + i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.a\,x^{i-3} + \ldots\ldots$

$+ i.\overline{i-1}.a^{i-2} = 0$; sur l'équation C de la même manière que sur l'équation B, d'où il résulte (D)...

$i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.x^{i-3}+\ldots\ldots+i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.a^{i-3}=0$; et ainsi de suite. Mais l'équation B n'est autre chose que $i(x+a)^{i-1}=0$, l'équation C autre chose que $i.\overline{i-1}.(x+a)^{i-2}=0$, l'équation D autre chose que $i.\overline{i-1}.\overline{i-2}.(x+a)^{i-3}=0$, etc.; donc ayant une équation A, si l'on forme l'équation B, le plus grand commun diviseur entre A et B, sera $(x+a)^{i-1}$; le plus grand commun diviseur entre B et C sera $(x+a)^{i-2}$; entre C et D, il sera $(x+a)^{i-3}$; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouve pour commun diviseur $x+a$, après $i-1$ opérations.

122. Supposons que P soit le produit de deux facteurs inégaux $(x+b)(x+c)=x^2+(b+c)x+bc$, l'équation P $(x+a)^i=0$ deviendra (A')....

$$x^{i+2}+[ia+b+c]x^{i+1}+\left[i.\frac{i-1}{2}a^2+ia.\overline{b+c}+bc\right]x^i+\left[i.\frac{i-1}{2}.\frac{i-2}{3}a^3+i.\frac{i-1}{2}a^2.\overline{b+c}+iabc\right]x^{i-1}+\text{etc.}=0,$$

sur laquelle, si on opère comme sur l'équation A, on trouvera (B')....

$$\overline{i+2}.x^{i+1}+(i+1)[ia+b+c]x^i+i\left[i.\frac{i-1}{2}a^2+ia.\overline{b+c}+bc\right]x^{i-1}+(i-1)\left[i.\frac{i-1}{2}.\frac{i-2}{3}a^3+i.\frac{i-1}{2}a^2.\overline{b+c}+iabc\right]x^{i-2}+\text{etc.}=0.$$

J'opérerai sur B' comme sur A', et je trouverai (C')....

$$\overline{i+1}.\overline{i+2}.x^i+i(i+1)[ia+b+c]x^{i-1}+i(i-1)\left[i.\frac{i-1}{2}a^2+ia.\overline{b+c}+bc\right]x^{i-2}+(i-1)$$

$(i-2)\left[i.\frac{i-1}{2}.\frac{i-2}{3}a^3+i.\frac{i-1}{2}a^2.\overline{b+c}+iabc\right]$
$x^{i-3}+\text{etc.}=0,$

et ainsi de suite. Mais B′ n'est autre chose que

$$i(x+a)^{i-1}(x+b)(x+c)+(x+a)^i(2x+b+c)=0;$$

C′ n'est autre chose que $i(i-1)(x+a)^{i-2}(x+b)(x+c)+2i(x+a)^{i-1}(2x+b+c)+2(x+a)^i=0,$

et ainsi de suite. Donc, ayant une équation A′, si l'on forme l'équation B′, le plus grand commun diviseur entre A′ et B′ sera $(x+a)^{i-1}$; le plus grand commun diviseur entre B′ et C′ sera $(x+a)^{i-2}$; et ainsi de suite, comme dans la première supposition.

123. En général, l'équation étant (α)..... $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+rx^{n-3}+\ldots\ldots+u=0;$ si l'on représente le nombre des facteurs inégaux du premier membre, par

$$x+A,\ x+B,\ x+C,\ x+D.\ \ldots\ldots$$

et le nombre des facteurs égaux par

$$(x+a)^e,\ (x+b)^i.\ \ldots\ldots$$

de manière que l'on ait pour le premier membre de cette équation,

$(x+A)(x+B)(x+C)(x+D\ldots\ldots(x+a)^e(x+b)^i\ldots$ que l'on forme ensuite l'équation

(ε)....$nx^{n-1}+(n-1)px^{n-2}+(n-2)qx^{n-3}+\ldots\ldots+t=0,$

le premier membre de celle-ci sera

$$(x+a)^e(x+b)^i\ldots[(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{C}).(x+\mathrm{D})\ldots$$
$$+(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{C})(x+\mathrm{D})\ldots+(x+\mathrm{A})$$
$$(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{D})\ldots+(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{C})$$
$$\ldots+\ldots]+(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{C})(x+\mathrm{D})\ldots$$
$$[e(x+a)^{e-1}(x+b)^i\ldots+i(x+b)^{i-1}(x+a^e)\ldots];$$

et α, $\mathcal{C}$ auront pour plus grand commun diviseur, $(x+a)^{e-1}(x+b)^{i-1}\ldots$. En opérant sur l'équation $\mathcal{C}$ comme sur l'équation α, on formera l'équation

$$(\gamma)\ldots\ldots n.\overline{n-1}.x^{n-2}+(n-1)(n-2)$$
$$px^{n-3}+(n-2)(n-3)qx^{n-4}+\ldots\ldots+s=0,$$

dont le premier membre doit être égal à

$$(x+a)^e(x+b)^i\ldots.[2(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{C})\ldots$$
$$+2(x+\mathrm{C})(x+\mathrm{D})\ldots+2(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{D})\ldots$$
$$+2(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{C})\ldots+2(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{D})\ldots$$
$$+2(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{B})\ldots+\ldots]+[2e(x+a)^{e-1}$$
$$(x+b)^i\ldots.+2i(x+b)^{i-1}(x+a)^e\ldots+\ldots]$$
$$[(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{C})(x+\mathrm{D})\ldots+(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{C})$$
$$(x+\mathrm{D})\ldots.+(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{D})\ldots.$$
$$+(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{C})\ldots.+\ldots.]+$$
$$(x+\mathrm{A})(x+\mathrm{B})(x+\mathrm{C})(x+\mathrm{D})\ldots.[e.\overline{e-1}.$$
$$(x+a)^{e-2}(x+b)^i\ldots.+2ei(x+a)^{e-1}$$
$$(x+b)^{i-1}\ldots.+i.\overline{i-1}.(x+b)^{i-2}$$
$$(x+a)^e\ldots.+\ldots.];$$

et il est nécessaire d'en conclure que le plus grand commun diviseur entre $\mathcal{C}$ et γ est $(x+a)^{e-2}.(x+b)^{i-2}\ldots$ Si e est le plus grand des exposans e, i, etc., après

une suite d'opérations semblables, nous arriverons à deux quantités qui auront pour plus grand commun diviseur $x + a$; en remontant ensuite, on trouvera $x + b$, et de la même manière toutes les autres racines égales, et leur nombre. Mais peut-être cette théorie est-elle présentée sous une forme trop générale ; je m'empresse de l'éclaircir par quelques exemples.

124. Nous proposerons pour premier exemple l'équation du cinquième degré

$$x^5 - 4x^4 - 15x^3 + 106x^2 - 196x + 120 = 0,$$

qui, à cause de quatre changemens de signes et d'une permanence, doit avoir quatre racines positives et une négative. Je multiplie le premier terme x^5 par 5, le suivant par 4, jusqu'au dernier terme que je multiplie par 0, parce que dans ce terme l'exposant de x est 0 ; je divise ensuite tous les termes par x, et il me vient

$$5x^4 - 16x^3 - 45x^2 + 212x - 196 = 0.$$

Je cherche ensuite le plus grand commun diviseur entre le premier membre de la proposée et celui de l'équation que nous venons de former ; je trouve pour ce diviseur $(x - 2)^2$. Le premier membre de la proposée étant divisé par $(x - 2)^2$, il vient au quotient $x^3 - 19x + 30$, qui lui-même doit être divisible par $x - 2$; la division donne au quotient $x^2 + 2x - 15$. Le premier membre de la proposée a donc trois facteurs égaux, exprimés par $(x - 2)^3$, et les deux facteurs inégaux seront tirés de l'équation $x^2 + 2x = 15$, laquelle donne $x = -1 \pm 4$; ces deux autres facteurs seront donc $x + 5$ et $x - 3$.

Il suit encore qu'en opérant sur

$$5x^4 - 16x^3 - 45x^2 + 212x - 196 = 0,$$

comme

comme sur la proposée, on formera

$$20x^3 - 48x^2 - 90x + 212 = 0,$$

et que $x - 2$ doit être le plus grand commun diviseur entre les premiers membres de ces deux dernières équations.

125. Nous ne nous sommes occupés n°. 69, que de la recherche du plus grand commun diviseur des monomes. Lorsque les quantités sont plus compliquées, le problême n'est pas aussi simple ; mais il suffira d'un seul exemple pour faire comprendre la méthode. Nous demanderons le plus grand commun diviseur de

$$(A)\ldots. 5x^4 - 16x^3 - 45x^2 + 212x - 196, \text{ et}$$
$$(B)\ldots. 20x^3 - 48x^2 - 90x + 212.$$

On verra aisément qu'on ne change rien au plus grand commun diviseur de deux quantités, en multipliant ou divisant l'une des deux par une quantité qui n'est point diviseur de l'autre, et qui n'a aucun commun diviseur avec cette autre. On peut donc multiplier A par 2, et diviser B par 2, ce qui les change en ces deux autres quantités :

$$(C)\ldots. 10x^4 - 32x^3 - 90x^2 + 424x - 392,$$
$$(D)\ldots. 10x^3 - 24x^2 - 45x + 106.$$

En divisant C par D, on trouve au quotient x et un reste

$$(E)\ldots. -8x^3 - 45x^2 + 318x - 392.$$

On multipliera D par 4, et le divisant ensuite par E, il viendra au quotient 5, avec un reste $-321x^2 + 1410x - 1536$, qu'on peut diviser par 3, ce qui le réduit à

$$(F)\ldots. -107x^2 + 470x - 512.$$

Je passe ensuite à la division de E par F ; or, pouvant multiplier E par 107, coefficient du premier terme de F, je fais cette multiplication, après quoi je divise le produit par F, ce qui donne au quotient $8x$ avec un reste

$$(G)\ldots. -8575x^2 + 38122x - 41944.$$

On divisera par G la quantité F, après l'avoir multipliée par 8575 ; et on aura au quotient 107, avec un reste $-48804x + 97608$, dont les deux termes sont divisibles par 48804, et peuvent être réduits de cette manière à $-x + 2$. Enfin on divisera G, pris avec un signe contraire, par $x - 2$; et, comme la division se fait sans reste, on en conclura que $x - 2$ est le plus grand commun diviseur des quantités A et B

126. Je reviens à la recherche des racines égales des équations, et je proposerai pour second exemple

$$(A)\ldots. x^8 - 12x^7 + 38x^6 + 64x^5 - 567x^4 + 1764x^3 + 1056x^2 - 3312x + 2160 = 0,$$

qui, à cause de six changemens de signes et de deux permanences, doit avoir six racines positives et deux négatives. En ayant tiré l'équation

$$(B)\ldots. 8x^7 - 7.12x^6 + 6.38x^5 + 5.64x^4 - 4.567x^3 + 3.1764x^2 + 2.1056x - 3312 = 0,$$

je cherche le plus grand commun diviseur entre A et B, que je trouve être $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Je passe ensuite à une seconde opération ; et, après avoir formé l'équation

$$(C)\ldots. 7.8x^6 - 6.7.12x^5 + 5.6.38x^4 + 4.5.64x^3 - 3.4.567x^2 + 2.3.1764x + 2.1056 = 0,$$

je cherche le plus grand commun diviseur entre B et C, que je trouve être $x - 2$. Ainsi $x - 2$ est un des facteurs égaux de A; et, comme il a été trouvé par deux opérations successives, son exposant est 3; le premier membre de la proposée a donc trois facteurs égaux, dont le produit est $(x - 2)^3$. On divisera le plus grand commun diviseur entre A et B, ou $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$, par $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$, et le quotient $x - 3$ sera encore un des facteurs égaux, dont le nombre est 2, puisqu'il a été trouvé après la première opération. On a donc pour le produit des facteurs égaux de A, $(x - 2)^3 (x - 3)^2$. En divisant par ce produit le premier membre de cette équation, il vient $x^3 - 19x + 30$, que j'égalerai à zéro pour trouver les trois autres facteurs.

Si il est possible de la résoudre en essayant successivement, tant en + qu'en —, les diviseurs commensurables de 30, qui sont (n°. 117) 1, 2, 3, 5, etc., on la résoudra aussi facilement (n°. 112) en la mettant sous cette forme $x = \frac{30}{x^2 - 19}$; car, en prenant d'abord les quarrés moindres que 19, qui sont 4 et 9, ces quarrés étant retranchés de 19, on aura — 15 et — 10, qui divisent exactement 30, et donnent au quotient — 2, — 3, qui sont des racines de 4 et 9. En outre si l'on ôte 19 de 25, il viendra 6, qui divise encore 30 exactement, et donne au quotient 5 une des racines de 25. Donc — 2, — 3 et + 5, sont les trois racines de l'équation du troisième dégré. Donc des huit racines de l'équation proposée, six sont positives et deux sont négatives; et à cause des racines égales, il n'y a que les nombres 2 et 3, pris tant en + qu'en —, et le nombre 5 pris en + seulement, qui puissent satisfaire à cette équation.

127. On peut présenter le problême de déterminer

les racines égales des équations sous un autre point de vue, auquel nous ne nous arrêterons qu'un instant. Soit l'équation du troisième degré

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0;$$

si elle doit avoir deux racines égales, on peut la représenter par $(x+h)^2(x+i) = 0$, ou, effectuant les multiplications indiquées, par

$$x^3 + (2h+i)x^2 + (h^2+2hi)x + ih^2 = 0.$$

On comparera cette équation à la proposée, et on aura

$$2h+i = p,\ h^2+2hi = q,\ ih^2 = r.$$

On tire de la première de celles-ci, $2h = p - i$, et, substituant cette valeur dans la seconde, l'équation du second dégré $3i^2 - 2pi = p^2 - 4q$ qui résoud le problème. Les valeurs de i et h étant déterminées en p et q, on les mettra dans $ih^2 = r$, et on aura la condition entre p, q et r, qui doit avoir lieu pour que la proposée ait deux racines égales.

128. Si l'équation du quatrième degré

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

a trois racines égales, on peut la représenter par

$(x+h)^3(x+i) = 0$, qui étant développée devient

$$x^4 + (3h+i)x^3 + 3h(h+i)x^2 + h^2(h+3i)x + ih^3 = 0.$$

En la comparant à la proposée, on trouve

$$3h+i = p,\ 3h(h+i) = q,\ h^2(h+3i) = r,\ ih^3 = s;$$

on tire des deux premières

$3h = p - i$ et $2i^2 - pi = p^2 - 3q$.

Les valeurs de h et i étant substituées dans les deux autres, on aura les conditions qui doivent avoir lieu pour que la proposée ait trois racines égales.

Si elle ne doit avoir que deux racines égales, on la représentera par $(x+h)^2(x^2+ix+k) = 0$, qui devient

$x^4 + (2h+i)x^3 + (h^2+2hi+k)x^2 + (ih^2 + 2hk)x + kh^2 = 0$.

Par la comparaison avec la proposée, on en tire

$2h + i = p$, $h^2 + 2hi + k = q$, $ih^2 + 2hk = r$, $kh^2 = s$;

partant $2h = p - i$, et cette valeur de $2h$ étant substituée dans les deux équations suivantes, elles deviennent

$(p-i)^2 + 4i(p-i) + 4k = 4q$,

$i(p-i)^2 + 4k(p-i) = 4r$, desquelles on tire

$(p-i)^3 + 3i(p-i)^2 - 4q(p-i) + 4r = 0$,

ou $2i^3 - 3pi^2 + 4qi = -p^3 + 4pq - 4r$.

Les valeurs de h, i, k, étant substituées dans $kh^2 = s$, on aura l'équation qui doit avoir lieu pour que la proposée ait deux racines égales.

Enfin, si elle a quatre racines égales, de manière que son premier membre puise être représenté par

$(x+h)^2(x+i)^2$, on aura l'équation

$x^4 + 2(h+i)x^3 + (h^2 + 4ih + i^2)x^2 +$
$2ih(h+i)x + h^2 i^2 = 0,$

à comparer à la proposée, d'où l'on tire

$2(h+i) = p, (h+i)^2 + 2ih = q, 2ih(h+i) = r,$
$h^2 i^2 = s.$

Les deux premières donnent $h + i = \frac{p}{2}$ et i par l'équation du second dégré $2i^2 - pi = \frac{p^2}{4} - q$; les valeurs de h et i étant substituées dans les deux autres, on aura les conditions qui doivent avoir lieu, pour que la proposée ait quatre racines égales deux à deux. Nous ne pousserons pas plus loin ces recherches.

De la manière de simplifier une équation en en faisant disparoître des termes.

129. Je reprends l'équation générale

$x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + rx^{n-3} + \ldots\ldots + u = 0,$

dans laquelle on fera $x = y + z$, pour avoir la transformée

$$y^n + nz.y^{n-1} + n.\frac{n-1}{2}z^2.y^{n-2} + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}z^3.y^{n-3}$$
$$+ p \quad + \overline{n-1}\,pz \quad + \overline{n-1}.\frac{n-2}{2}pz^2$$
$$+ q \quad + \overline{n-2}.\quad qz$$
$$+ \quad r$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$+ z^n + p z^{n-1} + q z^{n-2} + \ldots\ldots + u = 0.$

J'ai supposé $x = y + z$; au lieu de z j'aurois pu mettre $1, 2, 3 \ldots$ ou toute autre quantité déterminée quelconque ; ainsi je puis faire sur z telle hypothèse que je jugerai convenable. Si je fais $n z + p = 0$,

ou $z = \frac{-p}{n}$ le second terme disparoîtra. On fera dis-

paroître le troisième, en supposant $n \frac{n-1}{2} z^2 + \overline{n-1}.$

$p z + q = 0$, équation du second dégré ; l'équation seroit du troisième dégré, si on vouloit faire disparoître le quatrième terme, et ainsi de suite. La supposition propre à faire disparoître le second terme, est donc la plus simple de toutes ; nous la choisirons de préférence, à moins qu'il ne soit possible de faire disparoître le dernier, car alors tous les termes étant divisibles par y, le problême ne dépendroit plus que d'une équation d'un dégré inférieur d'une unité, et seroit par conséquent résolu. Mais l'équation qui doit faire disparoître le dernier terme étant

$z^n + p z^{n-1} + q z^{n-2} + \ldots\ldots + u = 0,$

présente les mêmes difficultés que la proposée ; ainsi demander de faire disparoître le dernier terme, ou demander de résoudre l'équation, c'est identiquement la même chose. Nous nous contenterons donc de faire disparoître le second terme au moyen de la substitution de

$y - \frac{p}{n}$ au lieu de x.

130. Si l'équation est $x^2 + px + q = 0$, on

fera $x = y - \frac{p}{2}$, et on aura pour transformée

$y^2 = \frac{p^2}{4} - q$, qui résolue donne $y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$;

partant $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, comme nous l'avons trouvé n°. 52.

Pour faire disparoître le second terme de l'équation du troisième dégré $x^3 + px^2 + qx + r = 0$,

on fera $x = y - \frac{p}{3}$, $x^2 = y^2 - \frac{2py}{3} + \frac{p^2}{9}$,

$x^3 = y^3 - py^2 + \frac{p^2 y}{3} - \frac{p^3}{27}$, et l'on aura la transformée

$y^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)y + \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r = 0$;

mais il n'en est pas des équations du troisième dégré comme de celles du second, il ne suffit pas d'en avoir fait disparoître un terme pour que la solution s'en suive; il faudroit en pouvoir faire disparoître deux par quelqu'autre substitution.

131. On y parvient en supposant

$x^2 = bx + a + y$, b, a, y étant des indéterminées.

En effet on en tire $x^3 = bx^2 + x(a + y) = b^2 x + x(a + y) + b(a + y)$, et substituant cette valeur dans la proposée,

$(b^2 + bp + q + a + y)x + (b + p)(a + y) + r = 0$.

Avant d'en tirer la valeur de x, on fera pour abréger

$b^2 + bp + q = e$, $b + p = f$, et on aura.

$x = -\frac{r + f(a+y)}{e+a+y}$. On mettra cette valeur de x dans

$x^2 = bx + a + y$, et on aura

$$\left[\frac{r+f(a+y)}{e+a+y}\right]^2 + b\,\frac{r+f(a+y)}{e+a+y} = a + y,$$

qui devient, en multipliant tous les termes par $(e + a + y)^2$,

$$\begin{array}{llll} r^2 & + 2rf(a+y) & + f^2(a+y)^2 = (a+y)^3. \\ + ber & + bef & + bf & \\ & + br & - 2e & \\ & - e^2 & & \end{array}$$

On représentera cette équation par

$(a + y)^3 + h(a+y)^2 + i(a+y) + k = 0$;

développant ensuite les puissances indiquées, on aura

$$\begin{array}{llll} y^3 + 3ay^2 + & 3a^2y + & a^3 & = 0, \\ + h & + 2ah & + ha^2 & \\ & + i & + ia & \\ & & + k, & \end{array}$$

de laquelle on fera disparoître deux termes, en supposant $3a + h = 0$, $3a^2 + 2ah + i = 0$.

Mais $h = 2q - p^2 - pb$, $i = qb^2 + (pq - 3r)b$
$+ q^2 - 2pr$;

donc $a = \frac{pb + p^2 - 2q}{3}$. Cette valeur étant substituée dans l'autre équation, on a pour déterminer b l'équation du second degré

$$\begin{array}{llll} & p^2b^2 & + 2p^3b & + p^4 = 0, \\ -3q & - 7pq & - 4p^2q & \\ & + 9r & + q^2 & \\ & & + 6pr, & \end{array}$$

où l'on prendra indifféremment celle qu'on voudra des valeurs de b. Ainsi, y se trouve être renfermé dans une équation du troisième dgré qui n'a que deux termes, et qu'on peut représenter par $y^3 = Q$. Nous avons trouvé pour les trois racines de cette équation (n° 113),

$$\sqrt[3]{Q}, \quad -\sqrt[3]{Q}.\frac{1-\sqrt{-3}}{2}, \quad -\sqrt[3]{Q}.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Ces trois valeurs de y étant substituées successivement dans les valeurs de x, tirées de l'équation $x^2 - bx = a + y$, on aura six valeurs de x, dont on prendra celles qui seront plus grands communs diviseurs entre $x^3 + px^2 + qx + r$ et $x^2 - bx - a - y$; ces trois valeurs seront les trois racines de l'équation du troisième degré.

Si l'équation étoit du quatrième degré, il faudroit en faire disparoître trois termes pour la réduire à une équation de cette forme $y^4 = Q$. Ce moyen de résoudre les équations est beaucoup trop compliqué ; la méthode ordinaire est plus simple, comme on le verra dans les articles suivans.

Résolution des Équations du troisième degré.

132. Toute équation du troisième degré peut être représentée par $y^3 + ay^2 + by + c = 0$, dont on fera disparoître le second terme en supposant $y = x - \frac{a}{3}$.

On aura $x^3 + px + q = 0$, dans laquelle

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Si l'on fait $x = u + t$, u et t étant deux quantités indéterminées, on aura

$$x^3 = u^3 + 3u^2t + 3ut^2 + t^3 = u^3 + t^3 + 3utx;$$

mais $x^3 = -q - px$, et ces deux valeurs de x^3 ne seroient point identiquement la même chose, si l'on n'avoit $u^3 + t^3 = -q$, $3ut = -p$.

On tire de la seconde de ces équations $t = \frac{-p}{3u}$; laquelle valeur de t, étant substituée dans la premiere, la change en celle-ci $u^6 + qu^3 = \frac{p^3}{27}$.

Cette équation du sixième degré est réductible au second, car si l'on fait $u^3 = z$, elle devient

$z^2 + qz = \frac{p^3}{27}$, de laquelle on tire

$$z = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}.$$

133. Si l'on fait $\frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = i$, on aura

$\frac{1+\sqrt{-3}}{2} = -i^2$, et pour les trois racines de l'équation $u^3 = 1$,

$$u = \sqrt[3]{1},\ u = -i\sqrt[3]{1},\ u = i^2\sqrt[3]{1}.$$

Cela posé, soit $Z = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}$,

on aura $1Z = -\frac{p^3}{27}$ et $\sqrt[3]{Z} = \frac{-p}{3\sqrt[3]{1}}$; d'ailleurs, $ii^2 = -1$; ainsi aux valeurs de u que nous venons de trouver, répondent trois valeurs de t, savoir

$$t = \sqrt[3]{Z},\ t = i^2\sqrt[3]{Z},\ t = -i\sqrt[3]{Z}.$$

Donc les trois racines de l'équation du troisième degré seront

$$x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{Z},\ x = -i\sqrt[3]{1} + i^2\sqrt[3]{Z},$$
$$x = i^2\sqrt[3]{1} - i\sqrt[3]{Z}.$$

134. Si Z et 1 sont réels, ce qui arrivera toujours lorsque $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ sera positif, l'équation du troisième degré n'aura qu'une seule racine réelle, $x = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{Z}$. Dans le cas contraire, c'est à dire, lorsque $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ sera négatif, les trois racines seront imaginaires.

Deux des facteurs imaginaires de $x^3 + px + q$ pourront être représentés (n°. 52) par $x + P + R\sqrt{-1}$, $x + P - R\sqrt{-1}$, dont le produit est une quantité

réelle $(x+\mathrm{P})^2+\mathrm{R}^2$; mais comment cette quantité réelle, étant multipliée par une quantité imaginaire qui ne peut être que de la forme $x+\mathrm{S}\pm\mathrm{T}\sqrt{-1}$, donneroit-elle une quantité réelle x^3+px+q ? Concluons donc qu'il est contraire à tous les principes que l'équation du troisième degré ait trois racines imaginaires. Aussi démontre-t-on que dans le cas irréductible, et c'est ainsi qu'on nomme le cas dont il s'agit, les trois racines qui se présentent sous une forme imaginaire sont effectivement réelles. L'équation

$4x^3-3r=\mp r^2 s$, où $r>s$, est irréductible, puisque $-\frac{1}{27}\left(\frac{3r^2}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{r^2 s}{4}\right)^2=-\frac{r^4}{4.16}(r^2-s^2)$, et peut représenter toutes celles du même genre, à cause des deux indéterminées r et s. Or, nous démontrerons dans l'application de l'algèbre à la géométrie, qu'en nommant A un arc qui a pour sinus ou pour cosinus s, le rayon étant r et π la demi-circonférence, les trois racines de l'équation du 3e degré, dans le cas irréductible, sont les sinus des trois angles $\frac{A}{3}$, $\frac{A+2\pi}{3}$, $\frac{A+4\pi}{3}$, lorsque $r^2 s$ a le signe $-$, et les cosinus des mêmes angles, lorsque $r^2 s$ a le signe $+$. Nous allons considérer la chose d'une autre manière; mais avant, nous remarquerons que dans les valeurs de z, Z le radical du second degré est affecté du double signe $\pm$ ou $\mp$, ce qui est inutile; il suffit de prendre

$$z=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}},\quad \mathrm{Z}=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}.$$

135. Dans le cas irréductible, soit

$\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=-e^2$, $-e^2$ pouvant représenter toute

quantité négative, on aura

$$z = e\sqrt{-1} - \frac{q}{2},\ Z = -\left(e\sqrt{-1} + \frac{q}{2}\right)$$

On fera usage de la formule du n°. 108, pour élever les deux binomes à la puissance $\frac{1}{3}$, et, à cause de $(e\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = -e^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1}$, on aura

$$\sqrt[3]{z} = e^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1} + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}}\frac{q}{2e} - \frac{1}{3\cdot 3}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^2\sqrt{-1} - \frac{5}{9\cdot 9}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^3 + \frac{2\cdot 5}{3\cdot 9\cdot 9}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^4\sqrt{-1} + \text{etc.},$$

$$\sqrt[3]{Z} = -e^{\frac{1}{3}}\sqrt{-1} + \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}}\frac{q}{2e} + \frac{1}{3\cdot 3}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^2\sqrt{-1} - \frac{5}{9\cdot 9}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^3 - \frac{2\cdot 5}{3\cdot 9\cdot 9}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^4\sqrt{-1} + \text{etc.}$$

On a donc pour la première valeur de $x = \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{Z}$, cette quantité toute réelle (k) .....

$$\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{q}{2e} - \frac{10}{9\cdot 9}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^3 + \text{etc.}$$

On aura aussi $\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{Z} = H\sqrt{-1}$, H étant $=$

$$2e^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3\cdot 3}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^2 + \frac{4\cdot 5}{3\cdot 9\cdot 9}e^{\frac{1}{3}}\left(\frac{q}{2e}\right)^4 - \text{etc.};$$

alors les deux autres valeurs de x pourront être représentées par

$$-\frac{K}{2} + \frac{H}{2}\sqrt{3} \text{ et } -\frac{K}{2} - \frac{H}{2}\sqrt{3}.$$

Si cette démonstration, que dans le cas irréductible les

trois racines de l'équation sont réelles, laisse quelques doutes, ils seront levés par celle que nous avons annoncée plus haut. Arrêtons-nous à quelques exemples.

136. Je proposerai de résoudre l'équation

$y^3 + 9y^2 + 18y = 910$ (n°. 119).

Pour y parvenir par la méthode que nous venons d'exposer, nous commencerons par en faire disparoître le second terme, en supposant $y = x - 3$, et x sera donné par $x^3 - 9x = 910$, que je comparerai à l'équation générale $x^3 + px + q = 0$. On a, de cette manière, $p = -9$, $q = -910$; partant

$$\sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}} = \sqrt{206998} = 97\sqrt{22}.$$

La proposée est donc dans le cas où l'une des racines seulement est réelle, et cette racine est

$$x = \sqrt[3]{455 + 97\sqrt{22}} - \sqrt[3]{-455 + 97\sqrt{22}}.$$

Pour extraire les racines cubiques de ces binomes (n°. 111), je fais $A = \pm 455$, $B = 206998$, d'où $A^2 - B = -27$ et $\sqrt[3]{A^2 - B} = -3$. Alors si on représente $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ par $r + s$, s et r seront donnés par $s^2 = \frac{\pm 455 - r^3}{3r}$, $4r^3 - 9r = \pm 455$.

Ayant multiplié l'équation du troisième degré par 2, si l'on fait $2r = \pm x$, on aura celle-ci, $x^3 - 9x = 910$, qui est la proposée même.

On n'obtiendra donc généralement la valeur de x que sous cette forme

$$x = \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} - \sqrt[3]{-A + \sqrt{B}}.$$

Lorsque cette valeur est commensurable, les binomes sont des cubes effectifs, et dans la différence des racines, les radicaux du second degré disparoissent. Dans l'exemple

$$\sqrt[3]{455+97\sqrt{22}}=5+\sqrt{22},$$

$$\sqrt[3]{-455+97\sqrt{22}}=-5+\sqrt{22},$$

dont la différence est 10, valeur de x; partant $y=10-3=7$.

137. Lorsqu'une seule racine est réelle, elle se présente sous une forme incommensurable, trop compliquée pour en faire usage, sans la développer en suite infinie. Dans le cas irréductible, les trois racines ne se présentent sous une forme réelle, qu'étant développées en suites infinies. Ainsi dans tous les cas la méthode générale ne donnera que des résultats approchés, lorsqu'on les voudra sous une forme qu'on puisse appliquer commodément aux besoins de l'analyse. Il sera donc plus expéditif d'employer directement les approximations, sans se servir des formules de la méthode générale.

138. Pour resoudre l'équation

$x^3-90x=98$, qui est dans le cas irréductible, puisque $\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}=-24599$, je la mettrai sous cette forme $x=\frac{98}{x^2-90}$, et l'on verra sans difficulté que 100 est le quarré à substituer à x^2, pour que, divisant 98 par la différence $x^2-90=10$, on ait une valeur approchée de la racine de ce quarré. Cette valeur est $x=9,8$. Si on ne la croit pas suffisamment approchée, on fera $x=9,8+\epsilon$, et ϵ sera assez petit pour qu'on en puisse négliger

négliger la troisième et même la seconde puissance. On prendra donc $x^3 = 941,192 + 288,12\varepsilon$; et, ayant substitué pour x^3 et x leurs valeurs dans l'équation $x^3 - 90x = 98$, on aura $59,192 + 198,12\varepsilon = 98$, d'où l'on tire $\varepsilon = \frac{38,808}{198,12} = 0,19$. On aura donc pour valeur plus approchée, $x = 9,99$; s'il étoit nécessaire d'approcher encore d'avantage de la vraie valeur de x, on feroit $x = 9,99 + \varepsilon$, et on opéreroit sur ε comme nous venons de faire sur ε, et ainsi de suite.

139. Je reprendrai l'équation générale, que je mettrai sous cette forme $x^3 \mp px + q = 0$, et p sera nécessairement positif. Je supposerai dans cette équation $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$ ou $\frac{q}{p\sqrt{p}} < \frac{2}{3\sqrt{3}}$; je ferai ensuite $x = mu$, et dans la transformée $u^3 \mp \frac{pu}{m^2} + \frac{q}{m^3} = 0$; je déterminerai m de manière que $\frac{p}{m^2} = 1$, d'où $m = \mp\sqrt{p}$, $\frac{q}{m^3} = \mp\frac{q}{p\sqrt{p}}$, que je pourrai égaler à une quantité négative $-r$, ayant soin de prendre $-\sqrt{p}$ lorsque q est positif et $+\sqrt{p}$ lorsqu'il est négatif. On aura $u^3 \mp u = r$, où r est un nombre positif moindre que $\frac{2}{3\sqrt{3}}$. Or r étant un nombre fractionnaire, si l'on suppose

$$u = R + ar + br^2 + cr^3 + dr^4 + er^5 + \text{etc.},$$

cette série sera convergente ; on aura

$$R^3 + 3aR^2.r + 3bR^2.r^2 + 3cR^2.r^3 + \text{etc.} = 0,$$

$\pm R$	$\pm a$	$\pm b$	$\pm c$
-1	$+3a^2R$	$+6abR$	
		$+a^3$	

et, pour déterminer R, a, b, c, etc., les équations

$R^3 \pm R = 0$, $(3R^2 \pm 1)a - 1 = 0$, $(3R^2 \pm 1)b + 3a^2R = 0$, $(3R^2 \pm 1)c + 6abR + a^3 = 0$, $(3R^2 \pm 1)d + 6acR + 3b^2R + 3a^2b = 0$, $(3R^2 \pm 1)e + 6adR + 6bcR + 3a^2c + 3ab^2 = 0$, etc.

Lorsque p a le signe +, on a $R^3 + R = 0$, qui fait voir que l'équation $u^3 + u = r$ n'a qu'une seule racine réelle. Lorsqu'il a le signe —, ou dans le cas irréductible, on a R par l'équation $R^3 - R = 0$; dont les trois racines 1, — 1 et 0 étant substituées dont les équations que nous venons de trouver, il en résulte ces trois valeurs de u,

$$1 + \frac{r}{2} - \frac{3r^2}{8} + \frac{r^3}{2} - \frac{105}{128}r^4 + \frac{3r^5}{2} - \text{etc.},$$

$$-1 + \frac{r}{2} + \frac{3r^2}{8} + \frac{r^3}{2} + \frac{105}{128}r^4 + \frac{3r^5}{2} + \text{etc.},$$

$$-r - r^3 - 3r^5 - \text{etc.},$$

qui sont les racines approchées de l'équation $u^3 - u = r$.

140. Nous prendrons pour exemple l'équation du n°. précédent, $x^3 - 90x = 98$. Alors

$$m = \sqrt{90} = 9{,}48684, \quad r = \frac{49}{45\sqrt{90}} = 0{,}11478,$$

$$r^2 = 0{,}01317, \quad r^3 = 0{,}00151, \quad r^4 = 0{,}00017,$$

$r^5 = 0{,}00002$, etc. En ne faisant usage que des quatres premiers termes des séries précédentes, on trouve pour les trois valeurs de u,

$1,05323, -0,99358, -0,11631;$

et pour les valeurs correspondantes de x,

$3,99182; -8,88784, -1,10359.$

Résolution des équations du quatrième Degré.

141. Nous représenterons toutes les équations du quatrième degré par

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0;$$

et, pour en faire disparoître le second terme, nous supposerons $y = x - \frac{a}{4}$. En faisant pour abréger

$$-\frac{3a^2}{8} + b = p, \quad \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c = q,$$

$$-\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{ac}{4} + d = r,$$

on aura, pour l'équation résultante de la substitution

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

Nous suivrons la même méthode que pour le troisième degré, et après avoir fait

$$x = u + t + s,$$

$$x^4 = u^4 + 4u^3 t + 4u^3 s + 6u^2 t^2 + 12u^2 ts + 6u^2 s^2$$
$$+ 4ut^3 + 12ut^2 s + 12uts^2 + 4us^3 + t^4 + 4t^3 s$$
$$+ 6t^2 s^2 + 4ts^3 + s^4,$$

nous ferons en sorte de donner à cette valeur de x^4 une forme telle qu'on la puisse comparer à cette autre valeur de x^4, $-px^2 - qx - r$.

Après quelques tentatives nous trouvons

$$x^4 = (4us + 2t^2)x^2 + 4(u^2t + ts^2)x +$$

$$u^4 - t^4 + s^4 - 2u^2s^2 + 4ut^2s,$$

et, par la comparaison des deux valeurs, ces équations

$$4us + 2t^2 + p = 0, \quad 4(u^2t + ts^2) + q = 0,$$

$$u^4 - t^4 + s^4 - 2u^2s^2 + 4ut^2s + r = 0,$$

qui serviront à déterminer u, t et s.

142. La troisième équation se change en celle-ci

$$(u^2 + s^2)^2 = t^4 + 4u^2s^2 - 4ut^2s - r;$$

on tire de la deuxième $u^2 + s^2 = -\frac{q}{4t}$; donc

$$t^6 + 4u^2s^2t^2 - 4ust^4 - rt^2 = \frac{q^2}{16},$$

dans laquelle il faudra mettre pour $4us$, et $4u^2s^2$ leurs valeurs tirées de la première, et on aura

$$4t^6 + 2pt^4 + \left(\frac{p^2}{4} - r\right)t^2 = \frac{q^2}{16},$$

équation du sixième degré qu'on réduira facilement au troisième. En faisant $t^2 = \frac{z}{4}$, on la change en celle-ci $z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z = q^2$. Mais $u^2 + s^2 = -\frac{q}{4t}$, $2us = -t^2 - \frac{p}{2}$; donc $u^2 + 2us + s^2 = (u + s)^2 = -\frac{q}{4t} - t^2 - \frac{p}{2}$, et $u + s = \pm\sqrt{-t^2 - \frac{q}{4t} - \frac{p}{2}}$. Donc

$$x = u + t + s = t \pm \sqrt{-t^2 - \frac{q}{4t} - \frac{p}{2}}.$$

En mettant dans cette expression successivement pour t ces valeurs $\frac{\sqrt{\zeta}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{\zeta}}{2}$, on aura les quatre racines de l'équation du quatrième degré, qui sont

$$2x = \sqrt{\zeta} + \sqrt{-\zeta - 2p - \frac{2q}{\sqrt{\zeta}}},$$

$$2x = \sqrt{\zeta} - \sqrt{-\zeta - 2p - \frac{2q}{\sqrt{\zeta}}},$$

$$2x = -\sqrt{\zeta} + \sqrt{-\zeta - 2p + \frac{2q}{\sqrt{\zeta}}},$$

$$2x = -\sqrt{\zeta} - \sqrt{-\zeta - 2p + \frac{2q}{\sqrt{\zeta}}}.$$

143. La réduite du troisième degré a trois racines ; de laquelle des trois ferons-nous usage ? Il ne sera pas nécessaire de substituer à ζ dans les formules précédentes successivement chacune de ses valeurs, pour s'assurer qu'on a toujours le même résultat, laquelle des trois racines de la réduite qu'on emploie. Quoi qu'il en soit, nous allons donner d'autres expressions des racines de l'équation du quatrième degré, dans lesquelles les trois racines de la réduite entreront également. Pour cela nous nommerons ζ, ζ', ζ'' les trois valeurs de ζ ; et, à cause de

$$-2p = \zeta + \zeta' + \zeta'', \quad q^2 = \zeta\zeta'\zeta'', \quad \frac{q}{\sqrt{\zeta}} = \sqrt{\zeta'\zeta''},$$

les quatres racines de l'équation du quatrième degré prendront cette autre forme

$$2x = \sqrt{z} + \sqrt{z' + z'' - 2\sqrt{z'z''}},$$

$$2x = \sqrt{z} - \sqrt{z' + z'' - 2\sqrt{z'z''}},$$

$$2x = -\sqrt{z} + \sqrt{z' + z'' + 2\sqrt{z'z''}},$$

$$2x = -\sqrt{z} - \sqrt{z' + z'' + 2\sqrt{z'z''}}.$$

Il faut remarquer que $z' + z''$ est toujours plus grand que $2\sqrt{z'z''}$ lorsque z' et z'' sont réelles, et moindre lorsqu'elles sont imaginaires; en effet, si l'on suppose $z' + z'' = m$, $2\sqrt{z'z''} = n$, on aura $z''^2 - mz'' = -\frac{n^2}{4}$, de laquelle on tire $z'' = \frac{m}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n^2}$, valeur qui ne peut être réelle que lorsque m est plus grand que n.

144. Il suit de-là 1°. que toutes les quatre racines sont réelles, si z, z' et z'' sont réelles et positives; 2°. que deux de ces racines seront réelles, et les deux autres imaginaires, si z seul est réelle et positive; 3°. que les racines seront toutes quatre imaginaires, si z, z', z'' étant réelles, une seule de ces quantités est positive. Il faut en excepter le cas où deux des racines de l'équation du troisième degré seroient égales, où l'on auroit, par exemple, $z' = z''$. Alors les quatre racines de l'équation du quatrième degré deviendroient

$$2x = \sqrt{z},\ 2x = \sqrt{z},\ 2x = -\sqrt{z} + 2\sqrt{z'},$$
$$2x = -\sqrt{z} - 2\sqrt{z'},$$

dont deux sont égales et réelles lorsque z est positive, et les deux autres imaginaires lorsques z' est négative. Nous allons éclaircir cette théorie par quelques exemples.

145. Je proposerai de résoudre l'équation

$$x^4 - \tfrac{17}{2}x^2 + 10x - \tfrac{31}{16} = 0.$$

En la comparant à l'équation générale, on a

$$p = -\tfrac{17}{2},\ q = 10,\ r = -\tfrac{31}{16},\ p^2 - 4r = 80.$$

Ainsi l'équation du troisième degré qu'il s'agit de résoudre dans cet exemple est

$$z^3 - 17z^2 + 80z = 100.$$

On s'assurera aisément qu'elle est dans le cas irréductible, qu'on ne peut la résoudre que par approximation, à moins que la méthode des diviseurs commensurables ne s'y applique. Or, 100 est divisible par 2, 5, 10, etc. J'essaie d'abord ces trois diviseurs, tant en + qu'en —, et je trouve que ces valeurs positives, 2, 5, 10 de z satisfont également. On fera donc
$z = 2, z' = 5, z'' = 10$, d'où l'on tirera

$$\sqrt{z' + z'' - 2\sqrt{z'z''}} = \sqrt{5}.\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{5}(1 - \sqrt{2}),$$

$$\sqrt{z' + z'' + 2\sqrt{z'z''}} = \sqrt{5}.\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{5}(1 + \sqrt{2}).$$

Partant, on aura pour les quatre racines de la proposée

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\sqrt{5},\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\sqrt{5};$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1 - \sqrt{2}}{2}\sqrt{5},\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\sqrt{5};$$

et il est à remarquer que les trois racines de la réduite

étant réelles et positives, les quatre racines de la proposée sont réelles.

146. Je proposerai pour second exemple

$$x^4 - \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{61}{16} = 0.$$

Alors $p = -\frac{1}{2}$, $q = 5$, $r = \frac{61}{16}$, $p^2 - 4r = -15$; et on a pour déterminer z, $z^3 - z^2 - 15z = 25$. On fera disparoître le second terme de cette équation, en supposant $z = V + \frac{1}{3}$, et il viendra

$V^3 - \frac{46}{3}V = \frac{812}{27}$, dont la racine réelle est (n°. 134),

$$V = \frac{1}{3}\left[\sqrt[3]{406 + 150\sqrt{3}} + \sqrt[3]{406 - 150\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{7 + \sqrt{3}}{3} + \frac{7 - \sqrt{3}}{3} = \frac{14}{3}. \text{ Donc}$$

$$z = 5,\ z' = -2 - \sqrt{-1},\ z'' = -2 + \sqrt{-1},$$

$$z' + z'' = -4,\ z'z'' = 5.$$

Ces substitutions étant faites dans les formules générales du n°. 143, on trouve pour les quatre racines de l'équation du quatrième degré

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}},$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}},$$

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{-1 + \frac{\sqrt{5}}{2}},$$

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{-1 + \frac{\sqrt{5}}{2}},$$

dont deux seulement sont réelles.

147. Proposons-nous pour dernier exemple

$$x^4 + \tfrac{19}{2}x^2 + 20x + \tfrac{521}{16} = 0.$$

En la comparant à l'équation générale, on trouve

$p = \frac{19}{2}$, $q = 20$, $r = \frac{521}{16}$, $4r - p^2 = 40$;

d'où résulte cette réduite du troisième degré,

$z^3 + 19z^2 - 40z = 400$, qui est dans le cas irréductible. Nous tenterons de la résoudre par la méthode des diviseurs commensurables. Les diviseurs de 400 qui réussissent sont $+5$, -4, -20; si donc l'on fait $z = 5$, $z' = -4$, $z'' = -20$, on trouvera pour les quatre racines de la proposée

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{6 + 2\sqrt{5}},$$

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{-1}.\sqrt{6 - 2\sqrt{5}},$$

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{6 + 2\sqrt{5}},$$

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{-1}.\sqrt{6 - 2\sqrt{5}},$$

et ces quatre racines sont imaginaires.

Des Equations des degrés supérieurs.

148. Si l'équation étoit du degré m, telle que $x^m + ax^{m-2} + bx^{m-3} + cx^{m-4} + \ldots + i = 0$, qui manque de second terme, et l'on sait qu'il est toujours facile de le faire disparoître, on supposeroit $x = u + t + s + r +$ etc., le nombre des indéterminées étant $m - 1$. Ayant x^m, on lui donneroit cette forme $x^m = Ax^{m-2} + Bx^{m-3} + Cx^{m-4} + \ldots\ldots + 1$; et par la comparaison avec la valeur de x^m tirée de la

proposée, on auroit ce nombre $m-1$ d'équations $A+a=0, B+b=0, C+c=0, \ldots I+i=0$.
Pour le cinquième degré

$$A=5\,(ur+ts),$$

$$B=5\,(tr^2+u^2s+s^2r+ut^2),$$

$$C=5\,(sr^3+u^3t+t^3r+us^3 - u^2r^2-t^2s^2+utsr),$$

$$D=-u^5-t^5-s^5-r^5-us^2r^2+5\,(u^2sr+ut^3s+utr^3+ts^3r-u^2ts^2-u^2t^2r-t^2sr^2).$$

Un premier problême sera d'éliminer un nombre $m-1$ d'inconnues, au moyen d'un même nombre d'équations ; et le choix de la méthode, comme nous le verrons bientôt, n'est pas indifférent pour que les équations à une seule inconnue, qui résulteront de l'élimination, soient les moins élevées possibles. Elles sont cependant d'un degré supérieur à celui de la proposée ; mais comme elles ne sont pas complètes, on a pu espérer de parvenir à une réduite d'un degré inférieur, comme on parvient dans le troisième degré à une réduite du second, et dans le quatrième, à une réduite du troisième.

149. Ayant une des racines, les $m-1$ autres dépendroient de trouver celles d'une équation à deux termes $x^m=\pm 1$. Nous démontrerons dans l'application de l'Algèbre à la Géométrie, que si l'on représente par π la demi-circonférence qui a l'unité pour rayon, par $\frac{i\pi}{m}$ un des arcs quelconques, i étant comme m un nombre entier positif, et par cos. $\frac{i\pi}{m}$ le cosinus de cet arc ; tous les facteurs trinomes de x^m+1, dont les facteurs binomes sont imaginaires, se trouveront en mettant dans $1-2x\cos.\frac{i\pi}{m}+x^2$, successivement pour

i tous les nombres impairs moindres que m ; et ceux de $x^m - 1$, en mettant dans la même expression, successivement pour i, tous les nombres pairs moindres que m : en outre $x^m + 1$ aura un facteur binome réel $x + 1$, lorsque m sera impair, et n'en aura aucun lorsque m sera pair ; lorsque m sera pair, $x^m - 1$ aura deux facteurs réels $x + 1$, $x - 1$, il n'aura de facteur réel que $x - 1$ lorsque m sera impair.

Si je divise $x^5 \pm 1$ par $x \pm 1$, j'aurai au quotient $x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$, dont je représenterai les deux facteurs du second degré par $x^2 + hx + 1$, $x^2 + ix + 1$. En les multipliant l'un par l'autre, on trouve $x^4 + (h + i)\, x^3 + (2 + ih)\, x^2 + (h + i)\, x + 1$; donc $h + i = \mp 1$, $ih = -1$, $h = \mp\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, $i = \mp\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2}$. Ainsi les deux facteurs du second degré de $x^5 \pm 1$ sont

$$x^2 \mp \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\, x + 1,\quad x^2 \mp \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\, x + 1.$$

En divisant $x^6 - 1$ par $x^2 - 1$, on trouve au quotient $x^4 + x^2 + 1$, dont les deux facteurs du second degré sont $x^2 - x + 1$, $x^2 + x + 1$. Mais l'équation $x^4 + x^2 + 1 = 0$, résolue à la manière de celles du second degré, donne $x^2 = -\frac{1}{2}(1 \mp \sqrt{-3})$, $= \frac{(1 \pm \sqrt{-3})^2}{4}$, et $x = \pm\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$; on trouveroit le même résultat en résolvant les équations $x^2 - x + 1 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$.

150. Si, indépendamment du théorême général, je voulois trouver encore les facteurs du second degré de $x^7 \pm 1$, je diviserois $x^7 \pm 1$ par $x \pm 1$, et j'aurois au quotient $x^6 \mp x^5 + x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1$. Je prendrois ensuite, pour les trois facteurs du second degré, $x^2 + hx + 1$, $x^2 + ix + 1$, $x^2 + kx + 1$, et les

ayant multipliés ensemble, je comparerois le multinome du sixième degré qui en proviendroit, avec le précédent, ce qui me donneroit pour déterminer h, i, k, les trois équations

$$h+i+k=\mp 1,\ hi+hk+ik=-2,\ kih=\pm 1.$$

Il résulte de l'élimination, que les valeurs de h, i, k sont les racines de l'équation $y^3 \pm y^2 - 2y = \pm 1$, dont on fera disparoître le second terme en supposant $y = z \mp \frac{1}{3}$, et on aura $z^3 - \frac{7z}{3} = \pm \frac{7}{27}$. Cette équation étant dans le cas irréductible, ses racines sont les sinus ou cosinus de trois arcs (n°. 134); ainsi les valeurs de h, i, k seront données en sinus ou cosinus de trois arcs, qu'on déterminera facilement au moyen du théorême que nous avons énoncé au commencement de l'article précédent.

Remarques sur la méthode des diviseurs commensurables.

151. Au-delà du quatrième degré, on n'a rien de général sur la solution des équations. Il faut avoir recours aux méthodes d'approximation; toutefois après avoir examiné si l'équation n'auroit pas de diviseurs commensurables. La méthode de trouver ces diviseurs est souvent pénible; nous tenterons de la simplifier par quelques remarques que nous ajouterons à ce que nous en avons dit (n°s. 117) et suivans.

Nous supposerons que dans l'équation

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + i = 0,$$

il ne se trouve pas de coefficiens fractionnaires. S'il s'en trouvoit, comme dans celle-ci

$y^3 + \frac{p}{q}y^2 + \frac{r}{s}y + t = 0$, on feroit disparoître les

dénominateurs sans donner un coefficient à y^3, en supposant $y = \frac{x}{n}$. Par cette substitution l'équation dont il s'agit devient

$x^3 + \frac{pn}{q}x^2 + \frac{rn^2}{s}x + tn^3 = 0$, où l'on peut prendre pour n une quantité divisible à la fois par q et s.

152. L'équation ainsi préparée, si le multinome

$$(P)\ldots. x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + i$$

devient nul dans la supposition de $x = -u$, $x + u$ sera un des diviseurs de ce multinome, et u un des diviseurs de i. Il n'est pas moins évident que si l'on nomme A et B ce que devient P par la substitution de α et $-\alpha$ pour x, on doit avoir $\alpha + u$ pour diviseur de A et $-\alpha + u$ pour diviseur de B. Cette remarque servira à abréger la recherche des diviseurs de i qui soient en même temps les racines de l'équation $P = 0$; il suffira de choisir ceux des diviseurs de i, pris tant en + qu'en —, qui, étant augmentés ou diminués de α, soient en même temps diviseurs de A et B. Lorsque l'équation sera numérique, on mettra successivement 1, 2, 3, etc. pour α; et si, par cette substitution, A devient A 1, A 2, A 3, etc., B devient B 1, B 2, B 3, etc.; ceux des diviseurs de i, pris tant en + qu'en —, qui seront les racines de l'équation $P = 0$, augmentés de 1, 2, 3, etc. seront nécessairement diviseurs de A 1, A 2, A 3, etc.; ces mêmes diviseurs de i, diminués de 1, 2, 3, etc. seront nécessairement diviseurs de B 1, B 2, B 3, etc.

153. Nous prendrons pour exemple l'équation du n°. 118, $x^3 + x^2 - 34x + 56 = 0$, dans le premier membre de laquelle si l'on met successivement pour x, 1, 2, 3 etc., — 1, — 2, — 3, etc., on aura A 1

$= 24$, $A2 = 0$, $A3 = -10$, etc., $B1 = 90$, $B2 = 120$, $B3 = 140$, etc. Cela posé, nous chercherons les diviseurs de 56, qui sont 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56. Or parmi ces diviseurs, pris tant en + qu'en —, il n'y a que $+1$, $+2$, -2, -4, $+7$, -7, qui, augmentés d'une unité, soient en même temps diviseurs de 24, et que -1, $+2$, -2, $+4$, -4, $+7$, -8, -14, qui, diminués d'une unité, soient en même temps diviseurs de 90; le choix ne peut donc tomber que sur $+2$, -2, -4, $+7$. Il est évident que des deux premiers, -2 est le seul qu'on puisse admettre. Quant à -4 et $+7$, ils satisfont à tout; en les diminuant de deux unités on a -6 et $+5$ diviseurs de 120; en les diminuant de trois unités on a -7 et $+4$ diviseurs de 140, etc. On est certain que $x = 2$, $x = 4$, $x = -7$, sont les racines de la proposée; ou, ce qui est la même chose, que $x - 2$, $x - 4$, $x + 7$ sont les facteurs de $x^3 + x^2 - 34x + 56$.

154. On demande les diviseurs commensurables de $x^4 + x^3 - 27x^2 + 3x - 90 = 0$, dans le premier membre de laquelle si on met pour x, $1, -1, 2, -2$, on a $A1 = -112$, $B1 = -120$, $A2 = -168$, $B2 = -196$. On cherchera les diviseurs de 90 qui sont 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90. Parmi ces nombres pris tant en + qu'en —, il n'y a que $1, -2, 3, -3, -5, 6, -9, 15, -15$, qui, augmentés d'une unité, soient diviseurs de 112, et que $-1, 2, 3, -3, 5, -5, 6, -9$ qui, diminués d'une unité, soient diviseurs de 120. On ne peut donc choisir qu'entre $3, -3, -5, 6, -9$. Je rejette 3 et -3, dont le premier, augmenté de 2, n'est pas diviseur de 168, et dont le second, diminué de 2, n'est pas diviseur de 196. Je rejette aussi -9, puisque $-9 - 2$ n'est pas diviseur de 196. Mais $-5 + 2$ et $6 + 2$ sont diviseurs de 168, $-5 - 2$

et $6 - 2$ sont diviseurs de 196; j'essaie ces deux nombres -5 et 6, et je trouve pour facteurs de $x^4 + x^3 - 27x^2 + 3x - 90$, ces deux binomes $x - 5$ et $x + 6$. Les deux autres sont imaginaires; leur produit est un trinome réel qu'on trouvera par une méthode analogue à la précédente appliquée aux diviseurs de deux dimensions.

155. Pour trouver les diviseurs commensurables de $x^4 + (b + a)x^3 + (3b^2 + ab - 6a^2)x^2 + (3ab^2 - 6a^2b)x - 18a^2b^2 = 0$, on essayeroit successivement les diviseurs de $18a^2b^2$ pris tant en $+$ qu'en $-$. Mais pour restreindre ces tâtonemens, on formera A et B, en mettant a et $-a$ successivement pour x dans le premier membre de la proposée; ce qui donnera

$$A = -4a^2(a^2 + ab + 3b^2), \quad B = -6a^2(a^2 - ab + 3b^2).$$

Ensuite de quoi on cherchera ceux des diviseurs de $18a^2b^2$, pris tant en $+$ qu'en $-$, qui, augmentés de a, sont diviseurs de A, et ceux des mêmes diviseurs qui, diminués de a, sont diviseurs de B. On trouvera que $-2a$ et $+3a$ satisfont à ces conditions.

On peut former A et B d'une autre manière, en mettant b et $-b$ pour x dans le premier membre de la proposée; ce qui donnera

$$A = 5b^2(b^2 + ab - 6a^2), \quad B = 3b^2(b^2 - ab - 6a^2).$$

Or $-2a + b$ et $3a + b$ divisent exactement $b^2 + ab - 6a^2$, comme $-2a - b$, $3a - b$ divisent exactement $b^2 - ab - 6a^2$. On trouve donc encore que $-2a$ et $+3a$ sont les diviseurs de $18a^2b^2$ qu'il faut choisir. Aussi $x - 2a$ et $x + 3a$ étant essayés, on

trouve qu'ils sont deux des facteurs de la proposée ; les deux autres sont imaginaires.

156. Je passe aux diviseurs commensurables du second degré, et je supposerai d'abord que l'équation est numérique ; je nommerai A 1 et B 1 ce que devient le premier membre de cette équation par la substitution de 1 et — 1 pour x. On verra sans difficulté qu'un des diviseurs de deux dimensions étant représenté par $x^2 + ux + t$, si l'on y fait $x = 1$, $1 + u + t$ sera diviseur de A 1 ; et si l'on y fait ensuite $x = -1$, $1 - u + t$ sera diviseur de B 1. Retranchant donc une unité des diviseurs de A 1 et B 1, pris tant en + qu'en —, on aura les nombres parmi lesquels doivent se trouver $u + t$ et $-u + t$. Mais $u + t$, t et $-u + t$ sont en progression arithmétique ; il ne faudra donc s'arrêter qu'à ceux des diviseurs de A 1 qui doivent donner $u + t$, des diviseurs de i qui doivent donner t, des diviseurs de B 1 qui doivent donner $-u + t$; il ne faudra, dis-je, s'arrêter qu'à ceux qui formeront entr'eux une progression arithmétique $\div u + t . t . -u + t$.

On pourra trouver plusieurs progressions atithmétiques entre lesquelles il s'agira de se déterminer ; on y parviendra comme lorsqu'il n'étoit question que de diviseurs d'une seule dimension. On formera A 2, A 3, A 4, etc., B 2, B 3, B 4, etc., en mettant dans le premier membre de la proposée pour x successivement 2, 3, 4, etc., — 2, — 3, — 4, etc. : et faisant les mêmes substitutions dans $x^2 + ux + t$, on aura $4 + 2u + t$, $9 + 3u + t$, $16 + 4u + t$, etc., dont le premier sera diviseur de A 2 ; le second de A 3, le troisième de A 4, etc. ; et $4 - 2u + t$, $9 - 3u + t$, $16 - 4u + t$, etc., dont le premier sera diviseur de B 2, le second de B 3, le troisième de B 4, etc. Retranchant donc 4, 9, 16, etc. des diviseurs de A 2, A 3, A 4, etc., B 2, B 3, B 4, etc., pris tant en + qu'en —, on aura les nombres

nombres parmis lesquels doivent se trouver $2u+t$, $3u+t$, $4u+t$, etc., $-2u+t$, $-3u+t$, $-4u+t$, etc. Règle générale, il ne faudra s'arrêter qu'à ceux des diviseurs de A 1, A 2, A 3, A 4, etc. qui doivent donner $u+t$, $2u+t$, $3u+t$, $4u+t$, etc., des diviseurs de i, qui doivent donner t, des diviseurs de B 1, B 2, B 3, B 4, etc., qui doivent donner $-u+t$, $-2u+t$, $-3u+t$, $-4u+t$, etc.; il ne faudra, dis-je, s'arrêter qu'à ceux de ces diviseurs qui pourront former une progression arithmétique

$$\div \text{etc. } 4u+t \cdot \quad 3u+t \cdot \quad 2u+t \cdot \quad u+t \cdot t \cdot$$
$$-u+t \cdot -2u+t \cdot -3u+t \cdot -4u+t \cdot \text{etc.}$$

157. Lorsque $u=0$, ou lorsque le diviseur de deux dimensions est x^2+t, le diviseut de i, qui, pris en $+$ ou en $-$, sera la valeur de t, ne devra satisfaire qu'aux seules conditions: sâvoir, qu'augmenté de 1, il soit commun diviseur de A 1 et B 1, qu'augmenté de 4, il soit commun diviseur de A 2 et B 2, qu'augmenté de 9, il soit commun diviseur de A 3 et B 3, et ainsi de suite. Pour en donner un exemple, nous proposerons de trouver les diviseurs de deux dimensions de l'équation $x^4+x^3-27x^2+3x-90=0$, pour laquelle $A1=-112$, $A2=-168$, $A3=-216$, $A4=-190$, etc., $B1=-120$, $B2=-196$, $B3=-288$, $B4=-342$, etc.; et nous chercherons d'abord si elle n'en auroit pas de la forme x^2+t. Nous trouvons 1, -2, 3, -3, -5, -9 pour les diviseurs de 90, qui, augmentés de 1, sont diviseurs de 112 et 120. Parmi ces diviseurs nous ne choisirons que ceux qui, augmentés de 4, sont diviseurs de 168 et 196, nous rejetterons donc 1 et -9; mais parmi les autres nous ne devons choisir que ceux qui, augmentés de 9, sont diviseurs de 216 et 288: ces nombres sont 3, -3 et -5, desquels nous devons

rejeter ceux qui, augmentés de 16, ne seroient pas diviseurs de 190 et 342; et comme 3 seul satisfait à cette condition, sans aller plus loin nous essayerons de diviser par $x^2 + 3$, et nous trouverons qu'il est effectivement un des diviseurs de deux dimensions.

L'autre diviseur sera de la forme $x^2 + ux + t$. Or, parmi les diviseurs de 112 et 120, on trouve 28 et 30 qui, pris en — et diminués de 1, donnent — 29, — 31, entre lesquels — 30, diviseur de 90, est moyenne proportionnelle arithmétique. On peut donc supposer $t = -30$, $u + t = -29$, $-u + t = -31$. Si la supposition est fondée, on doit trouver parmi les diviseurs de 168 et 196, pris en — et diminués de 4, les nombres — 28 et — 32; parmi les diviseurs de 216 et 288, pris en — et diminués de 9, les nombres — 27 et — 33, etc.: et comme toutes ces conditions sont remplies, il faut en conclure que $x^2 + x - 30$ est un des diviseurs commensurables de deux dimensions; il a pour facteurs $x - 5$, $x + 6$, qui sont les diviseurs commensurables d'une seule dimension, trouvés n°. 154.

Parmi les diviseurs de 112 et 120, j'aurois pu prendre 14 et 6, puisque, diminués de 1, ils donnent 13 et 5, entre lesquels 9, diviseur de 90, est moyenne proportionnelle aritméthique. Mais il faudroit que, parmi les diviseurs de 168 et 196, il s'en trouvât qui, diminués de 4, donnassent 12 et 6, ou que 16 et 10 fussent diviseurs de ces deux nombres; ce qui n'étant pas, nous avons dû rejeter 14 et 6, et d'autres diviseurs de 112 et 120, qui sont dans le même cas. Il en résulte que $x^4 + x^3 - 27x^2 + 3x - 90$ ne peut avoir pour diviseurs commensurables de deux dimensions, que $x^2 + x - 30$ et $x^2 + 3$.

158. Pour $x^6 - 1$, on a $A1 = B1 = 0$, $A2 = B2 = 63$, $A3 = B3 = 728$, $A4 = B4 = 4095$, etc. Les diviseurs de $A1$ et $B1$, diminués de 1, ne

pouvant être que -1, on a $u+t=-1$, $-u+t=-1$; partant $u=0$, $t=-1$. Il en résultera que x^2-1 est un des diviseurs de deux dimensions, si $-1+4=3$ est diviseur de 63, si $-1+9=8$ est diviseur de 728, si $-1+16=15$ est diviseur de 4095, etc.; ce qu'on peut aisément vérifier.

Parmi les diviseurs de 63, qui sont 1, 3, 7, 9, 21, je prends pour diviseur de A 2, 3, qui, diminué de 4, donne -1, et je fais $2u+t=-1$; je prends pour diviseur de B 2, 7, qui, diminué de 4, donne 3, et je fais $-2u+t=3$; de cette manière je trouve $t=1$, $u=-1$, et pour diviseur de deux dimensions x^2-x+1. J'aurois pu faire $2u+t=3$, $-2u+t=-1$; ce qui auroit donné $t=1$, $u=1$, et pour diviseur de deux dimensions x^2+x+1. Il faut examiner si ces suppositions peuvent être admises. On a la progression arithmétique,

etc. $-3\cdot-2\cdot-1\cdot1\cdot3\cdot4\cdot5$. etc. :

or, $-2+9=7$, et $4+9=13$ sont des diviseurs de 728; $-3+16=13$, $5+16=21$ sont des diviseurs de 4095, etc.; il est donc démontré que ces suppositions peuvent être admises sans essayer si x^6-1 est divisible par $x^2\mp x+1$.

Pour x^6+1, $A1=B1=2$, $A2=B2=65$, $A3=B3=730$, $A4=B4=4097$, etc. Je vois sans difficulté que x^2+1 est un des diviseurs de deux dimensions; car 1, qui est la valeur de t, augmenté de 1, est diviseur de 2; augmenté de 4, il est diviseur de 65; augmenté de 9, il est diviseur de 730; augmenté de 16, il est diviseur de 4097, etc. Je ne trouve pas d'autre diviseur commensurable; effectivement par le théorême du n°. 149, les deux autres diviseurs sont $x\mp x\sqrt{3}+1$.

159. On demande les diviseurs commensurables de deux dimensions de l'équation littérale

$x^4 + (b+a)x^3 + (3b^2 + ab - 6a^2)x^2 +$
$(3ab^2 - 6a^2 b)x - 18a^2 b^2 = 0,$

pour laquelle, si l'on nomme A et B ce que devient le premier membre lorsqu'on y met a et $-a$ pour x, on a $A = -4a^2(a^2 + ab + 3b^2)$, $B = -6a^2(a^2 - ab + 3b^2)$. La même substitution de a et $-a$ pour x, faite dans $x^2 + ux + t$, change ce facteur en $a^2 + au + t$, et $a^2 - au + t$; or, parmi les diviseurs de A et B, si l'on prend $-4a^2$ et $-6a^2$, et que de ces quantités on ôte a^2, on aura $-5a^2$ et $-7a^2$, entre lesquelles $-6a^2$, diviseur de $18a^2b^2$, est moyenne proportionnelle arithmétique; on peut donc supposer $au + t = -5a^2$, $-au + t = -7a^2$, desquelles on tire $u = a$, $t = -6a^2$, et pour diviseur de deux dimensions $x^2 + ax - 6a^2$.

En ôtant a^2 de $a^2 + ab + 3b^2$ et de $a^2 - ab + 3b^2$, on a $ab + 3b^2$ et $-ab + 3b^2$, entre lesquels $3b^2$, diviseur de $18a^2b^2$ est moyenne proportionnelle arithmétique. Je puis supposer $au + t = ab + 3b^2$, $-au + t = -ab + 3b^2$; d'où je tire $u = b$, $t = 3b^2$, et pour diviseur de deux dimensions $x^2 + bx + 3b^2$.

Pour former A et B, j'aurois pu mettre dans le premier membre de la proposée, pour x successivement, b et $-b$; j'aurois trouvé

$A = 5b^2(b^2 + ab - 6a^2)$, $B = 3b^2(b^2 - ab - 6a^2)$.

Les mêmes substitutions faites dans $x^2 + ux + t$, m'auroient donné $b^2 + bu + t$, $b^2 - bu + t$. Alors, parmi les diviseurs de A et B, j'aurois choisi $5b^2$ et $3b^2$ qui, diminués de b^2, m'auroient donné $4b^2$ et $2b^2$, entre lesquels $3b^2$, diviseur de $18a^2b^2$, est moyenne proportionnelle arithmétique; j'aurois donc supposé

$bu + t = 4b^2$, $-bu + t = 2b^2$, desquelles j'aurois tiré pour un des diviseurs de deux dimensions $x^2 + bx + 3b^2$. J'aurois pris ensuite parmi les diviseurs de A et B, $b^2 + ab - 6a^2$, $b^2 - ab - 6a^2$, qui, diminués de b^2, m'auroient donné $ab - 6a^2$, $-ab - 6a^2$, entre lesquels $-6a^2$, diviseur de $18a^2b^2$, est moyenne proportionnelle arithmétique. J'aurois supposé $bu + t = ab - 6a^2$, $-bu + t = -ab - 6a^2$, desquelles j'aurois tiré pour diviseur de deux dimensions $x^2 + ax - 6a^2$.

En mettant dans le premier membre de la proposée, pour x successivement, $2b$ et $-2b$, on trouve $18b^2(2b^2 + ab - 3a^2)$, et $10b^2(2b^2 - ab - 3a^2)$, que pour abréger nous nommerons M et N. Nous reprendrons ensuite les progressions arithmétiques

$\div$ etc. $4b^2 . 3b^2 . 2b^2$. etc., $\div$ etc. $ab - 6a^2 .$
$-6a^2 . -ab - 6a^2$. etc.

qui, étant continuées de part et d'autre, doivent satisfaire d'abord à cette condition : si on ajoute $4b^2$ à chacun des termes $5b^2$ et b^2 de la première, il faut que $9b^2$ et $5b^2$ soient diviseurs de M et N, comme ils le sont effectivement : si de même on ajoute $4b^2$ à chacun des termes $2ab - 6a^2$, $-2ab - 6a^2$ de la seconde, les quantités résultantes $4b^2 + 2ab - 6a^2$, $4b^2 - 2ab - 6a^2$ doivent être et sont effectivement diviseurs de M et N.

Pour ces équations, comme pour les équations numériques, ayant formé une suite de quantités telles que M et N par la substitution de b, $2b$, $3b$, $4b$, etc., $-b$, $-2b$, $-3b$, $-4b$, etc., pour x dans le premier membre de la proposée, il sera nécessaire qu'elles aient pour diviseurs les termes successifs des progressions arithmétiques augmentés de b^2, $4b^2$, $9b^2$, $16b^2$, etc. Mais nous ne croyons pas devoir nous étendre davantage sur cet objet.

Méthode d'approximation pour la résolution des Equations déterminées.

160. Soit proposée l'équation

$$x^4 + 2x^3 - 36x^2 + 5x = 116;$$

on mettra successivement pour x des nombres entiers, pris tant en $+$ qu'en $-$, jusqu'à ce qu'on arrive à une valeur du premier membre très-approchée de 116, plus grande ou moindre. La supposition de $x = 5$ donne 0 pour ce premier membre; celle de $x = 6$ donne 462 plus éloigné de 116 que 0; la vraie valeur de x est donc entre 5 et 6, plus près de 5 que de 6. Pour trouver des dixièmes à la racine, je ferai $x = 5 + \frac{r}{10}$, et r sera donné par l'équation

$$r^4 + 220\,r^3 + 14400\,r^2 + 295000\,r = 1160000.$$

J'opérerai sur cette équation comme sur la précédente; et faisant $r = 3$, je trouverai pour le premier membre 1020621, qui diffère moins de 1160000 que le nombre plus grand que j'aurois trouvé en supposant $r = 4$; la vraie valeur de r est donc entre 3 et 4, plus près de 3 que de 4. Pour avoir des centièmes, je ferai $r = 3 + \frac{s}{10}$, et s sera donné par

$$s^4 + 2320\,s^3 + 1643400\,s^2 + 387448000\,s = 1393790000,$$

où je ferai successivement $s = 3$ et $s = 4$. Ces deux suppositions donnent pour valeurs du premier membre de l'équation 1177197321 et 1576195136, dont la première est moindre et l'autre plus grande que 1393790000.

La vraie valeur de s est donc entre 3 et 4, de très-peu de chose plus près de 3 que de 4; aussi en continuant l'opération, on trouvera que si, pour avoir des millièmes, on fait $s = 3 + \frac{t}{10}$, le nombre entier qui approchera le plus de la vraie valeur de t sera le nombre 5. Donc $x = 5,335$, et cette valeur ne diffère de la vraie que de dix millièmes.

161. On peut présenter le calcul d'une autre manière, peut-être plus simple. On fera $x = 5 + \frac{r}{i}$, i étant un des nombres de la progression décuple, et on aura, pour déterminer r, l'équation

$$r^4 + 22\,i\,r^3 + 144\,i^2\,r^2 + 295\,i^3\,r = 116\,i^4.$$

Si l'on suppose $i = 10$, on aura à essayer les nombres entiers depuis 0 jusqu'à 10 exclusivement, et on trouvera que 3 est celui de ces nombres qui approche le plus. Si l'on suppose $i = 100$, on aura à essayer les nombres depuis 30 jusqu'à 40 exclusivement, et on trouvera que 33 est celui de ces nombres qui approche le plus. Si l'on suppose $i = 1000$, on aura à essayer les nombres depuis 330 jusqu'à 400 exclusivement. Soit $r = 335$, pour donner un exemple de la manière de diriger le calcul, on aura

$$\begin{aligned}
295\,i^3\,r &= 98825,000,000,000\\
144\,i^2\,r^2 &= 16160,400,000,000\\
22\,i\,r^3 &= 802,408,750,000\\
r^4 &= 11,853,765,625\\
\hline
&115,799,662,515,625.
\end{aligned}$$

La somme que nous venons de trouver est moindre que 116 suivi de douze zéros : on trouvera une somme

plus grande en supposant $r = 336$, et on s'assurera que 335 est, comme nous l'avons trouvé, la valeur de r aux dix millièmes près.

162. Soit encore proposé de résoudre l'équation du sixième degré

$$x^6 - 2x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 25x^2 + 14x = 21.$$

On fera, comme nous l'avons dit, x successivement égal à 1, 2, etc., pris tant en + qu'en —; par la supposition de $x = 2$, le premier membre devient — 24; par celle de $x = 3$, il devient + 141; la vraie valeur de x est donc entre 2 et 3, plus près de 3 que de 2.

On supposera $x = 2 + \frac{r}{i}$, et r sera donné par l'équation

$$r^6 + 10i\,r^5 + 37i^2\,r^4 + 68i^3\,r^3 + 55i^4\,r^2 - 6i^5\,r = 45i^6,$$

où l'on fera d'abord $i = 10$ pour avoir des dixièmes. Ce nombre de dixièmes doit être plus grand que 5; on fera donc $r = 6$, et on trouvera pour ce que devient le premier membre, 3650545 6, moindre que 45000000, mais qui en diffère moins que le nombre plus grand qu'on trouveroit en faisant $r = 7$. C'est pourquoi ayant fait $i = 100$, nous essayerons $r = 64$, et nous trouverons pour valeur du premier membre, en ne nous arrêtant qu'aux premiers chiffres pour abréger, 4386... moindre que 4500...; la supposition de $r = 65$ donne une valeur plus grande, et la comparaison des trois nombres fait voir que la vraie valeur de r est à-peu-près à distance égale de 64 et 65. Ainsi, pour trouver des millièmes, ayant fait $i = 1000$, nous essayerons $r = 645$; et comme cette substitution donne pour valeur du premier membre de l'équation un nombre moindre que $45\,i^6$, tandis que celle de $r = 646$ en donneroit un plus grand, nous devons en conclure

qu'aux dix millièmes près $x = 2,645$. Pour les trouver, on ne perdra pas de vue que les calculs précédens indiquent que le nombre des millièmes est plus près de 646 que de 645, et que, pour trouver des dix-millièmes; la valeur de r à essayer doit être plus grande que 6455, on trouve effectivement qu'elle est 6457. Avec un peu d'habitude, tous ces détails ne sont ni longs ni pénibles, et la méthode résout rigoureusement ce problème : approcher des racines réelles d'une équation, jusqu'à n'en différer que de décimales de tel ordre qu'on voudra.

Après avoir essayé les nombres 1, 2, 3, etc., pris en +, je les essaye pris en —, et je trouve que par la substitution de — 2 et — 3, au lieu de x, le premier membre de notre équation devient — 144 et + 381; il y a donc une valeur de x entre — 2 et — 3. Je supposerai $x = -2 - \frac{r}{i}$, et r sera donné par l'équation

$$r^6 + 14 i r^5 + 77 i^2 r^4 + 204 i^3 r^3 + 221 i^4 r^2 - 2 i^5 r = 165 i^6.$$

En opérant sur cette équation comme sur l'autre, on trouvera encore $r = 6457$. Ainsi, aux cent millièmes près, x a pour valeurs réelles + 2,6457 et — 2,6457, et n'en a point d'autres.

Des Racines imaginaires des équations.

163. Une équation ne peut avoir de racines imaginaires qu'en nombre pair; et si une de ces racines peut être représentée par $u + t\sqrt{-1}$, il y en aura une autre correspondante de la forme $u - t\sqrt{-1}$. Ayant représenté les équations de tous les degrés par

$$A = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{etc.},$$

si l'on y fait $x = u + t\sqrt{-1}$, on aura la transformée

$A = K + R\sqrt{-1}$, dans laquelle

$$K = au + bu^2 + cu^3 + du^4 + eu^5 + fu^6 + \text{etc.}$$
$$- t^2(b + 3cu + 6du^2 + 10eu^3 + 15fu^4 + \text{etc.})$$
$$+ t^4(d + 5eu + 15fu^2 + \text{etc.})$$
$$- t^6(f + \text{etc.})$$
$$\text{etc.},$$

$$R = t(a + 2bu + 3cu^2 + 4du^3 + 5eu^4 + 6fu^5 + \text{etc.})$$
$$- t^3(c + 4du + 10eu^2 + 20fu^3 + \text{etc.})$$
$$+ t^5(e + 6fu + \text{etc.})$$
$$\text{etc.}$$

La substitution de $u - t\sqrt{-1}$ aulieu de x donnera une autre transformée $A = K - R\sqrt{-1}$; en l'ajoutant à la première on a $A = K$; en les ôtant l'une de l'autre, on a $R = o$. Les deux équations $A = K$ et $R = o$, serviront à resondre les problêmes qu'on peut proposer sur les racines imaginaires des équations. Nous remarquerons, relativement à la seconde, que t ne pouvant point être nul, tous les termes doivent être divisés par t; alors les deux équations ne renfermeront que des puissances paires de t, et l'on ne pourra prendre pour t^2 que des nombres positifs, autrement la valeur de t seroit imaginaire, et celle de $u + t\sqrt{-1}$ une quantité réelle; ce qui seroit contre l'hypothèse que ce binome doit représenter toute racine imaginaire. Le cas le plus simple est celui de $u = o$, où la racine imaginaire n'auroit qu'un seul terme $\pm t\sqrt{-1}$. Alors t^2 sera donné par l'équation

$$A = -bt^2 + dt^4 - ft^6 + \text{etc.};$$

t^2 trouvé, il faudra que sa valeur satisfasse à l'autre équation

$a - ct^2 + et^4 -$ etc. $= 0$. Il ne sera pas inutile d'éclaircir cette théorie par quelques exemples.

164. Nous nous occuperons d'abord de l'équation du troisième degré $A = ax + x^3$, pour laquelle nos deux équation deviennent

$$A = au + u^3 - 3ut^2, \quad a + 3u^2 = t^2,$$

et donnent par l'élimination de t^2, $8u^3 + 2au + A = 0$. Pour ce degré u ne peut-être nul que A ne soit nul; alors $t^2 = a$, $t = \pm\sqrt{a}$, $x = \pm\sqrt{-a}$, quantité imaginaire, à moins que a ne soit négatif. En général $t = \pm\sqrt{a + 3u^2}$; ainsi tant que a sera positif, on pourra donner à u telle valeur qu'on voudra, positive ou négative, sans que t cesse d'être réel: et comme toutes les valeurs possibles de u, combinées avec les valeurs corrélatives de t, épuisent toutes les combinaisons possibles entre A et a, on en peut conclure que toutes les fois que a sera positif, la proposée aura deux racines imaginaires, comme nous l'avons vu n°. 134. Tout se réduit à trouver u, et l'équation qui le renferme pourra être résolue par les méthodes précédentes.

165. Pour l'équation du quatrième degré $A = ax + bx^2 + x^4$, nos deux équations deviennent

$$A = au + bu^2 + u^4 - t^2(b + 6u^2) + t^4;$$

$$a + 2bu + 4u^3 = 4ut^2,$$

et donnent, par l'élimination de t^2,

$$a^2 - 16Au^2 = 64u^6 + 32bu^4 + 4b^2u^2,$$

ou $a^2 - 16Au^2 = 4u^2(4u^2 + b)^2$.

Si nous nous occupons d'abord du cas particulier où $u = 0$, nous trouvons qu'il n'a lieu que lorsque $a = 0$; dans ce cas t^2 est donné par l'équation $t^4 - bt^2 = A$,

de laquelle on tire $t^2 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{A + \frac{b^2}{4}}$. Les conditions, pour que les valeurs de t^2 soient réelles, sont que A soit positif, ou qu'étant négatif, il soit moindre que $\frac{b^2}{4}$; autrement ces deux valeurs seront imaginaires aussi bien que les quatre racines de l'équation du quatrième degré. Cette équation aura encore des racines imaginaires, lorsque la valeur de t^2 étant réelle, sera positive. Or $\frac{b}{2} + \sqrt{A + \frac{b^2}{4}}$ sera positive, lorsque b sera positif, ou lorsque b étant négatif, il sera moindre que $\sqrt{A + \frac{b^2}{4}}$; $\frac{b}{2} - \sqrt{A + \frac{b^2}{4}}$ sera positive, lorsque b étant positif, il sera plus grand que $\sqrt{A + \frac{b^2}{4}}$. Nous avons tiré les mêmes résultats de la discussion de l'équation $x^4 + bx^2 = A$.

166. Je reprends les deux équations

$$t^4 - t^2 (b + 6u^2) u^4 + bu^2 + au = A,$$

$$a + 2bu + 4u^3 - 4ut^2 = 0;$$

et, après avoir multiplié la seconde par u, je l'ôte de la première, ce qui me donne

$$t^4 - t^2 (b + 2u^2) = A + 3u^4 + bu^2,$$

de laquelle on tire

$$t^2 = \frac{b + 2u^2}{2} \pm \frac{\sqrt{4A + (4u^2 + b)^2}}{2}.$$

Cette équation combinée avec celle-ci,

$$a^2 - 16Au^2 = 4u^2 (4u^2 + b)^2,$$

nous serviroient à trouver le nombre des racines réelles et imaginaires de l'équation générale du quatrième degré; mais comme elles ne nous apprendroient rien de plus que la discussion de l'équation même, nous ne nous y arrêterons pas. Nous nous contenterons de les considérer comme moyen de déterminer, au moins par approximation, les racines imaginaires de l'équation, lorsqu'elle en a. Toute la difficulté consiste à parvenir, par l'élimination, à une équation qui ne renferme que u, à faire choix de celles des valeurs de u, qui, étant substituées dans l'expression de t^2, la rendront réelle et positive.

Pour en donner un exemple, nous proposerons l'équation du quatrième degré

$x^4 + 3x^2 + 6x + 35 = 0$. On a $a = 6$, $b = 3$, $A = -35$, et u est donné par l'équation $9 + 140u^2 = u^2(4u^2 + 3)^2$. Après quelques essais, je trouve que la valeur de u^2 est entre 2 et 3, qu'elle est $2,25 = \frac{9}{4}$. On mettra cette valeur dans l'expression de t^2 qui de vient $t^2 = \frac{15}{4} \pm 1$; l'équation a donc quatre racines imaginaires, qui sont :

$$\frac{-3+\sqrt{-11}}{2}, \quad \frac{3+\sqrt{-19}}{2},$$

$$\frac{-3-\sqrt{-11}}{2}, \quad \frac{3-\sqrt{-19}}{2}.$$

La combinaison des valeurs de u et t donnent en outre

$$\frac{3+\sqrt{-11}}{2}, \quad \frac{-3+\sqrt{-19}}{2}$$

$$\frac{3-\sqrt{-11}}{2}, \quad \frac{-3-\sqrt{-19}}{2}$$

qui sont les racines de $x^4 + 3x^2 - 6x + 35 = 0$;

et cela doit être ainsi, car a n'entre que dans l'équation qui renferme u seul, et il n'y entre qu'élevé à la seconde puissance.

Du retour des Suites.

167. Etant proposée l'équation

$$A = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + \text{etc.},$$

dont le second membre est une suite infinie, on demande la valeur de x en une suite ordonnée par rapport aux puissances successives de A. Ce problème est connu des Géomètres, sous le nom de problème du retour des suites, ou de méthode inverse des séries. On supposera

$$x = mA + nA^2 + pA^3 + qA^4 + rA^5 + sA^6 + \text{etc.}$$

$$x^2 = m^2A^2 + 2mnA^3 + 2mpA^4 + 2mqA^5 + 2mrA^6 + \text{etc.}$$
$$+ n^2 \quad + 2np \quad + 2nq$$
$$+ p^2$$

$$x^3 = m^3A^3 + 3m^2nA^4 + 3m^2pA^5 + 3m^2qA^6 + \text{etc.}$$
$$+ 3mn^2 \quad + 6mnp$$
$$+ \quad n^3$$

$$x^4 = m^4A^4 + 4m^3nA^5 + 4m^3pA^6 + \text{etc.}$$
$$+ 6m^2n^2$$

$$x^5 = m^5A^5 + 5m^4nA^6 + \text{etc.}$$

$$x^6 = m^6A^6 + \text{etc.}$$

Par la substitution de ces valeurs dans la proposée, on aura une équation qui doit être identique indépendamment de A; on égalera donc à zéro les coefficiens des puissances successives de cette quantité, ce qui donnera pour déterminer m, n, p, etc. les équations

$am - 1 = 0$,

$an + bm^2 = 0$,

$ap + 2bmn + cm^3 = 0$,

$aq + b(2mp + n^2) + 3cm^2n + dm^4 = 0$,

$ar + 2b(mq + np) + 3cm(mp + n^2) + 4dm^3n + em^5 = 0$,

$as + b(2mr + 2nq + p^2) + c(3m^2q + 6mnp + n^3)$
$+ d(4m^3p + 6m^2n^2) + 5em^4n + fm^6 = 0$,

etc. On tire de ces équations

$$m = \frac{1}{a}, \quad n = -\frac{b}{a^3}, \quad p = -\frac{c}{a^4} + \frac{2b^2}{a^5},$$

$$q = -\frac{d}{a^5} + \frac{5cb}{a^6} - \frac{5b^3}{b^7},$$

$$r = -\frac{e}{a^6} + \frac{6bd}{a^7} + \frac{3c^2}{a^7} - \frac{21b^2c}{a^8} + \frac{14b^4}{a^9},$$

$$s = -\frac{f}{a^7} + \frac{7be}{a^8} + \frac{7cd}{a^8} - \frac{28b^2d}{a^9} - \frac{28bc^2}{a^9} +$$
$$\frac{84b^3c}{a^{10}} - \frac{42b^5}{a^{11}},$$

etc.

Dans l'exemple qui va suivre, nous ferons usage des deux méthodes, de la méthode directe et de la méthode inverse des séries. Il sera tiré de la théorie des logarithmes, dont nous n'avons encore pu donner qu'une foible idée.

Un nombre étant donné, trouver son logarithme.

168. x et z étant deux quantités quelconques, si nous représentons le logarithme de $1 + x$ par

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{etc.},$$

il faudra représenter celui de $1 + z$ par

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.}$$

Soit $1+z=(1+x)^m$; on aura $\log.(1+x)^m = m\log.(1+x) = max + mbx^2 + mcx^3 + \text{etc.}$; on aura par conséquent l'équation

$$max + mbx^2 + mcx^3 + mdx^4 + mex^5 + \text{etc.}$$
$$= az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.},$$

où il faudra mettre pour z sa valeur tirée de

$$z = mx + m.\frac{m-1}{2}x^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^3 + \text{etc.}$$

On formera de cette manière l'équation identique

$$am.\frac{m-1}{2}x^2 + am.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^3 +$$
$$+ bm.\overline{m-1} \quad + bm^2.\overline{m-1}$$
$$+ cm^3.\overline{m^2-1}$$
$$am.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}x^4 + \text{etc.} = 0,$$
$$+ bm^2.\overline{m-1}.\frac{m-2}{3}$$
$$+ bm^2.\frac{\overline{m-1}^2}{4}$$
$$+ 3cm^3\,\frac{m-1}{2}$$
$$+ dm.\overline{m^3-1},$$

dans laquelle il faudra égaler à zéro les coefficiens des puissances successives de x, et on tirera de ces équations $b = -\frac{a}{2}$, $c = \frac{a}{3}$, $d = -\frac{a}{4}$, etc.

Donc $\log.(1+x) = a\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}\right)$,

où

où a demeure indéterminé. Ainsi, un même nombre peut avoir une infinité de logarithmes différens. Le plus simple de tous les systêmes logarithmiques est celui où l'on suppose $a = 1$; mais il sera facile de passer d'un systême à l'autre, lorsqu'on sera convenu de la valeur à donner à l'indéterminé a, qu'on appelle le module. Nous ferons $a = 1$, et par conséquent

$$\log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.};$$

nous en tirerons, en faisant x négatif,

$$\log.(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \text{etc},$$

et, ôtant le second logarithme du premier,

$$\log.\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.}\right),$$

série qui sera toujours convergente, puisqu'il faut que x soit moindre que 1, pour que $\frac{1+x}{1-x}$ soit un nombre entier positif.

169. Si on desiroit trouver le logarithme de 3, il faudroit faire $\frac{1+x}{1-x} = 3$, d'où l'on tireroit $x = \frac{1}{2}$; on auroit pour logarithme de 3,

$$1 + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.16} + \frac{1}{7.64} + \frac{1}{9.256} + \text{etc.},$$

qu'on réduiroit en suite décimale 1,0986123..... On trouveroit de la même manière pour le logarithme de 10, 2,3025851. Mais ces logarithmes ne sont pas ceux des tables calculées d'après l'hypothèse que les nombres 1, 10, 100, 1000, etc. de la progression décuple ont pour logarithmes 0, 1, 2, 3, etc. Pour trouver les logarithmes des nombres, dans cette hypothèse, il faut chercher le module qui y convient. L'é-

quation la plus simple pour le déterminer, est certainement celle-ci, $1 = a\,(2{,}3025851)$, de laquelle on tier $a = 0{,}4342945$. Il faudra multiplier par ce module tous les logarithmes déduits de la série du n°. précédent, et qu'on appelle logarithmes hyperboliques, pour avoir les logarithmes des tables les plus communes. En multipliant 1,0986123 par 0,4342945, on a 0,47712 12, qui est le logarithme de 3 dans l'hypothèse que 0, 1, 2, 3, etc. sont les logarithmes de 1, 10, 100, 1000, etc.

Un Logarithme étant donné, trouver le nombre auquel il appartient.

170. On fera $\frac{1}{2}\log.\frac{1+x}{1-x} = A$, et on aura l'équation

$$A = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{etc.},$$

de laquelle il faut tirer la valeur de x. On mettra dans la formule du n°. 167, 1, 0, $\frac{1}{3}$, 0, $\frac{1}{5}$, etc. Pour a, b, c, d, e, etc., et à cause de $m = 1$, $n = 0$, $p = -\frac{1}{3}$, $q = 0$, $r = \frac{2}{15}$, etc, on aura

$$x = A - \tfrac{1}{3}A^3 + \tfrac{2}{15}A^5 - \text{etc.}$$

Si on vouloit tirer la valeur de x de

$$A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.},$$

où $A = \log.(1+x)$, on mettroit dans la même formule $1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$, etc., pour a, b, c, d, etc., et à cause de $m = 1$, $n = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{1}{24}$, etc., on auroit

$$x = A + \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{6}A^3 + \tfrac{1}{24}A^4 + \text{etc.}$$

Des méthodes d'élimination.

171. Nous avons déjà eu occasion d'éliminer des inconnues dans des équations du premier degré; mais le problême est assez important pour que nous croyons devoir nous y arrêter encore.

Soient ces deux équations

$$ax+by+c=0,\ ex+fy+g=0;$$

on multipliera l'une des deux, la seconde, par exemple, par r, et l'ajoutant à la première, on aura

$$(a+er)x+(b+fr)y+c+gr=0;$$

pour en tirer la valeur de x, on fera $b+fr=0$, d'où $r=-\frac{b}{f}$, et on aura $x=-\frac{c+gr}{a+er}=\frac{bg-cf}{af-be}$;

pour en tirer la valeur de y, on fera $a+er=0$, d'où $r=-\frac{a}{e}$, et on aura $y=-\frac{c+gr}{b+fr}=-\frac{ag-ce}{af-be}$.

Si l'on avoit à éliminer dans ces trois équations

$ax+by+cz+d=0$, $ex+fy+gz+h=0$, $ix+ki+lz+m=0$, on multiplieroit la seconde par r, la troisième par s, et les ajoutant à la première, on auroit

$$(a+er+is)x+(b+fr+ks)y+(c+gr+ls)z+d+hr+ms=0.$$

On feroit $b+fr+ks=0$, $c+gr+ls=0$, pour avoir $x=-\frac{d+hr+ms}{a+er+is}$; $a+er+is=0$, $c+gr+ls=0$, pour avoir $y=-\frac{d+hr+ms}{b+fr+ks}$; $a+er+is$

$=0$, $b+fr+ks=0$, pour avoir $\zeta=-\frac{d+hr+ms}{c+gr+ls}$.

Le problême seroit réduit à trouver deux inconnues au moyen de deux équations, et à en substituer les valeurs dans celles de x, y, ζ, on auroit de cette manière

$$x=\frac{d(kg-fl)+h(ll-ck)+m(cf-bg)}{a(fl-kg)+e(ck-bl)+i(bg-cf)},$$

$$y=\frac{m(ag-ce)+h(ci-al)+d(el-ig)}{a(fl-kg)+e(ck-bl)+i(bg-cf)},$$

$$\zeta=\frac{h(ak-bi)+d(fi-ek)+m(be-af)}{a(fl-kg)+e(ck-bl)+i(bg-cf)}.$$

172. Lorsque les derniers termes seront nuls, ou lorsqu'on n'aura à éliminer qu'entre les équations

$$ax+by+c\zeta=0,\ cx+fy+g\zeta=0,$$
$$ix+ky+l\zeta=0,$$

on n'en pourra tirer que les rapports

$$\frac{x}{\zeta}=\frac{bg-cf}{af-be},\ \frac{y}{\zeta}=-\frac{ag-ce}{af-be};$$

et, pour que ces équations puissent avoir lieu, on aura entre les coefficiens l'équation de condition que voici,

$$a(fl-gk)+e(ck-bl)+i(bg-cf)=0.$$

Or, le premier membre de cette équation n'est autre chose que le dénominateur commun des valeurs de x, y, ζ, lorsque d, h, m ne sont pas nuls. Une autre remarque, c'est qu'ayant ce dénominateur, il sera facile de trouver les numérateurs, car les valeurs de x, y, ζ pouvant être mises sous cette forme

$$x=\frac{-d(fl-gk)-h(ck-bl)-m(bg-cf)}{a(fl-gk)+e(ck-bl)+i(bg-cf)},$$

$$y = \frac{-d(el-ig)-h(ci-al)-m(ag-ce)}{b(el-ig)+f(ci-al)+k(ag-ce)},$$

$$z = \frac{-d(fi-ek)-h(ak-bi)-m(be-af)}{c(fi-ek)+g(ak-bi)+l(be-af)},$$

il est visible qu'il suffira de substituer dans le dénominateur commun $-d$, $-h$, $-m$, à a, e, i, pour avoir le numérateur de x, à b, f, k, pour avoir le numérateur de y, à c, g, l, pour avoir le numérateur de z. Le problème d'éliminer dans un nombre quelconque d'équations du premier degré, seroit réduit à trouver l'équation de condition, pour que ces équations fussent possibles dans le cas où l'on égaleroit à zéro les derniers termes.

173. On se rappellera ce que nous avons dit (n°. 97) sur les changemens d'ordre ou les permutations. Deux lettres A, B, sont susceptibles de ces permutations AB, BA; et changeant le signe de B lorsqu'il change de place, on a AB — BA. Ajoutant une troisième lettre C, nous aurons ces permutations ABC, ACB, CAB, — BAC, — BCA, — CBA; et changeant le signe de C lorsqu'il change de place, ABC — ACB + CAB — BAC + BCA — CBA.

Cela posé, nous conviendrons que A, B, C représentent les coefficiens de x, y, z dans nos trois équations; ces coefficiens dans la première, lorsqu'ils sont à la première place; dans la seconde, lorsqu'ils sont à la seconde place; dans la troisième, lorsqu'ils sont à la troisième place. Ainsi, dans le premier terme ABC, A sera le coefficient de x dans la première équation, ou équivaudra à a; B sera le coefficient de y dans la seconde équation, ou équivaudra à f; C sera le coefficient de z dans la troisième équation, ou équivaudra à l; c'est-à-dire, que nous conviendrons d'écrire afl au lieu de ABC. En opérant de la même manière sur les autres termes, nous trouverons

$$afl - agk + cek - bel + bgi - cfi,$$

qui est précisément le premier membre de l'équation de condition, ou le dénominateur commun des valeurs de x, y, z.

174. Proposons-nous d'éliminer u, x, y, z dans les quatre équations

$$au + bx + cy + dz + R = 0,$$
$$eu + fx + gy + hz + S = 0,$$
$$iu + kx + ly + mz + T = 0,$$
$$nu + px + qy + rz + V = 0,$$

et d'abord de trouver le dénominateur commun des valeurs de ces quantités. Des permutations des trois lettres A, B, C, je tirerai celles des quatre lettres A, B, C, D de la manière suivante,

ABC.. ABCD — ABDC + ADBC — DABC
— ACB.. — ACBD + ACDB — ADCB + DACB
CAB.. CABD — CADB + CDAB — DCAB
— BAC.. — BACD + BADC — BDAC + DBAC
BCA.. BCAD — BCDA + BDCA — DBCA
— CBA.. — CBAD + CBDA — CDBA + DCBA

Cela posé, si nous convenons de représenter le coefficient de u par A, celui de x par B, celui de y par C, celui de z par D; de mettre pour A, lorsqu'il est à la première place, a; lorsqu'il est à la seconde, e; lorsqu'il est à la troisième, i; lorsqu'il est à la quatrième, n; de mettre pour B, lorsqu'il est à la première place, b; lorsqu'il est à la seconde, f; lorsqu'il est à la troisième, k; lorsqu'il est à la quatrième, p; et ainsi de C et D, nous aurons

$$
\begin{aligned}
&aflr - afmq + ahkq - dekq\\
&-agkr + agmp - ahlp + delp\\
&+cekr - cemp + chip - dgip\\
&-belr + bemp - bhiq + dfiq\\
&+bgir - bgmn + bhln - dfln\\
&-cfir + cfmn - chkn + dgkn,
\end{aligned}
$$

qui est le dénominateur qu'il s'agissoit de trouver, et auquel on peut donner cette forme plus simple,

$$
\begin{aligned}
&(af-be)(lr-mq)-(ak-bi)(gr-hq)+\\
&(ap-bn)(gm-hl)+(ek-if)(cr-dq)-\\
&(ep-fn)(cm-dl)+(ip-kn)(ch-dg).
\end{aligned}
$$

Pour trouver ensuite les numérateurs des valeurs de u, x, y, z, on mettra dans l'expression du dénominateur commun $-R$, $-S$, $-T$, $-V$ au lieu de a, e, i, h, lorsqu'il s'agira de u; au lieu de b, f, k, p, lorsqu'il s'agira de x; au lieu de c, g, l, q, lorsqu'il s'agira de y; au lieu de d, h, m, r, lorsqu'il s'agira de z. On aura, de cette manière, pour le numérateur de u,

$$
\begin{aligned}
&-flrR + fmqR - hkqR + dkqS\\
&+gkrR - gmpR + hlpR - dlpS\\
&-ckrS + cmpS - chpT + dgpT\\
&+blrS - bmqS + bhqT \quad dfqT\\
&-bgrT + bgmV - bhlV + dflV\\
&+crfT - cfmV + chkV - dgkV,
\end{aligned}
$$

auquel on donnera la forme suivante,

$$(bg-cf)(mV-rT)-(bl-ck)(hV-rS)+$$

$(bq-cp)(hT-mS)+(fl-gk)(dV-rR)-$
$(fq-gp)(dT-mR)+(kq-lp)(dS-hR).$

On donnera la même forme aux autres numérateurs, lorsqu'on les aura trouvés. Cette méthode d'éliminer est d'une application facile, quelque soit le nombre des équations ; elle n'exige qu'une médiocre attention pour arriver, sans s'égarer, au résultat qu'on desire.

175. Proposons-nous maintenant de trouver l'équation en x, résultante des deux équations du second degré.

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$
$$mx^2+nxy+py^2+qx+ry+s=0.$$

On multipliera la première par $Ax^2+Bxy+Dx+Ey+F$, et la seconde par $Mx^2+Nxy+Qx+Ry+S$; on ajoutera ensemble les deux produits, et on aura

$$\begin{array}{llllll}
aA\,x^4 & +bA\,x^3y & +cA\,x^2y^2 & +cB\,xy^3 & + \\
+mM & +aB & +bB & +pN & + \\
 & +nM & +pM & & + \\
 & +mN & +nN & & +
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
dA\,x^3 & +eA\,x^2y & +eB\,xy^2 & +cE\,y^3 & + \\
aD & +dB & +cD & +pR & + \\
qM & +bD & +bE & & + \\
mQ & +aE & +rN & & + \\
 & +rM & +pQ & & + \\
 & +qN & +nR & & \\
 & +nQ & & & \\
 & +mR & & &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{llllll}
fA\,x^2 & +fB\,xy & +eE\,y^2 & +fD\,x & +fe\,y & +fF=0.\\
dD & +eD & +cF & +dF & +eF & +sS\\
aF & +dE & +rR & +sQ & +sR & \\
sM & +bF & +pS & +qS & +rS & \\
qQ & +sN & & & & \\
mS & +rQ & & & & \\
 & +qR & & & & \\
 & +nS & & & &
\end{array}
$$

On égalera à zéro les coefficiens de x^3y, x^2y^2, xy^3, x^2y, xy^2, y^3, xy, y^2, y ; et ces neuf équations du premier degré serviront à déterminer B, D, E, F, M, N, Q, R, S. Les valeurs de ces lettres étant substituées dans les termes qui resteront de l'équation précédente, on aura une équation finale de cette forme

$$AA'x^4 + AB'x^3 + AC'x^2 + AD'x + AE' = 0,$$

dont on pourra diviser tous les termes par A ; $A' = 0$ sera l'équation de condition pour que l'équation finale ne soit que du troisième degré. On trouvera facilement ensuite l'équation finale en y, et le problème sera résolu.

176. Nous n'entreprendrons pas les éliminations précédentes, à cause de la longueur des calculs, et nous nous contenterons de discuter le cas particulier où l'une des équations seroit du premier degré. Nous ferons $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$; et parce qu'alors $A = 0$, $B = 0$, $E = 0$, les neuf équations seront réduites à celles-ci,

$$cD + rN = 0, \quad bD + rM + qN = 0, \quad cF + rR = 0,$$
$$bF + eD + sN + rQ + qR = 0,$$
$$eF + sR + rS = 0.$$

Il est naturel de supposer D, M, N nuls, ce qui réduit nos équations à trois, desquelles on tire

$$R = -\frac{c}{r}F, \quad Q = \frac{cq-br}{r^2}F, \quad S = \frac{cs-er}{r^2}F.$$

On mettra ces valeurs dans l'équation finale

$$(aF+qQ)x^2+(dF+sQ+qS)x+fF+sS=0;$$

et, après avoir divisé tous les termes par F, on aura

$$(ar^2+cq^2-bqr)x^2+(dr^2+2cqs-eqr-brs)x+fr^2+cs^2-ers=0,$$

qui est celle qu'on trouvoit en mettant dans $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$,

pour y sa valeur $-\frac{qx+s}{r}$.

Cet exemple suffit pour faire comprendre combien l'élimination deviendroit pénible, si on avoit un plus grand nombre d'équations, et sur-tout d'équations plus élevées que le second degré. Aussi les Géomètres qui ont entrepris de semblables travaux, dans l'espérance d'arriver à la résolution des équations du cinquième degré (n°. 148), ont-ils été forcés d'inventer de nouveaux signes pour diminuer la longueur énorme des calculs. Il seroit fort difficile de faire connoître ces différens moyens sans entrer dans des détails que des élémens ne comportent pas.

QUATRIÈME PARTIE.

DE L'ANALYSE INDÉTERMINEE.

Des Problêmes indéterminés du premier degré.

177. UN problême qui dépendroit de la seule équation $ay = bx + c$, qui renferme deux inconnues y et x, seroit indéterminé ; il seroit susceptible de plusieurs solutions. Or, a, b, c étant des nombres entiers, positifs ou négatifs, on demande tous les nombres entiers positifs ou négatifs, qui, étant substitués à y et x, peuvent satisfaire à cette équation. Il faut dabord préparer l'équation, en divisant tous les termes par le facteur commun, si a, b, c ne sont pas premiers entr'eux ; cette division faite, si les coefficiens de y et x ne sont pas premiers entr'eux, le problême est impossible ; car dans cette hypothèse on pourra les représenter par hm et im, et l'équation deviendra $hy - ix - \frac{c}{m}$, à laquelle on ne pourra pas satisfaire, en mettant pour y et x des nombre entiers. Ainsi nous supposerons que a, b, c et a, b, sont premiers entr'eux. On tire de l'équation proposée $y = \frac{bx + c}{a}$; si b est plus grand que a, on divisera b par a ; soit $\frac{b}{a} = h + \frac{b'}{a}$, on aura $y = hx + \frac{b'x + c}{a}$. Mais $\frac{b'x + c}{a}$

doit être un nombre entier, on l'égalera à q, d'où $x = \frac{aq-c}{b1}$; en divisant a par $b1$, si $\frac{a}{b1} = h1 + \frac{a1}{b1}$, l'équation précédente deviendra $x = h1\,q + \frac{a1q-c}{b1}$. On fera $\frac{a1q-c}{b1}$, qui doit être un nombre entier, $= r$, d'où $q = \frac{b1r+c}{a1}$; soit $\frac{b1}{a1} = h2 + \frac{b2}{a1}$, l'équation précédente deviendra $q = h2\,r + \frac{b2r+c}{a1}$. On fera $\frac{b2r+c}{a1} = s$, d'où $r = \frac{a1s-c}{b2}$; soit $\frac{a1}{b2} = h3 + \frac{a2}{b2}$, l'équation précédente deviendra $r = h3\,s + \frac{a2s-c}{b2}$. On fera $\frac{a2s-c}{b2} = t$; d'où $s = \frac{b2t+c}{a2}$; soit $\frac{b2}{a2} = h4 + \frac{b3}{a2}$, l'équation précédente deviendra $s = h4\,t + \frac{b3t+c}{a2}$. Faisons encore $\frac{b3t+c}{a2} = u$, d'où $t = \frac{a2u-c}{b3}$; soit $\frac{a2}{b3} = h5 + \frac{a3}{b3}$, l'équation précédente deviendra $t = h5\,u + \frac{a3u-c}{b3}$. Si $a3 = 1$, l'opération est achevée; on fera $\frac{u-c}{b3} = m$, et on pourra prendre pour m tel nombre entier qu'on voudra, positif ou négatif. Alors

$u = b3\,m + c$, $t = h5\,u + m$, $s = h4\,t + u$,
$r = h3\,s + t$, $q = h2\,r + s$, $x = h1\,q + r$,
$y = hx + q$.

Il est à remarquer, comme nous l'avons déja fait (n°.71), que par la suite des opérations $\frac{b}{a}$ est développé en fraction continue

$$\frac{b}{a} = h + \frac{1}{h1 + \frac{1}{h2 + \frac{1}{h3 + \frac{1}{h4 + \text{etc.}}}}}$$

178. Je prendrai pour exemple le problême suivant: trouver un nombre qui, étant divisé par 39, donne un reste 16, et qui, étant divisé par 56, donne un reste 27. En nommant N ce nombre, on aura les deux équations $\frac{N}{39} = y + \frac{16}{39}$, $\frac{N}{56} = x + \frac{27}{56}$, y et x étant des nombres entiers positifs. Donc $39y = 56x + 11$ et $y = \frac{56x+11}{39}$. Ayant développé $\frac{16}{39}$ en fraction continue, je trouve $h = 1$, $h1 = 2$, $h2 = 3$, $h3 = 2$, $h4 = 2$; partant $56 = 39 + b1$ et $b1 = 17$; $39 = 2.17 + a1$ et $a1 = 5$; $17 = 3.5 + b2$ et $b2 = 2$; $5 = 2.2 + a2$ et $a2 = 1$; $2 = 2 + b3$ et $b3 = 0$. Donc $u = 11$, $t = m$, $s = 2m + 11$, $r = 5m + 22$, $q = 17m + 77$, $x = 39m + 176$, $y = 56m + 253$, $N = 2184m + 9883$.

Pour avoir la moindre valeur possible de N, il faudra prendre pour m un nombre entier négatif, tel que $2184m$ soit moindre que 9883, et en diffère moins que si l'on prenoit tout autre nombre. En supposant $m = -4$, on satisfait à cette condition, et on a $N = 1147$. On fera donc successivement m égal à -4, -3,

— 2, — 1, 0, 1, 2, etc., et on aura cette progression arithmétique

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, etc.,

dont le premier terme est 1147, et la différence 2184. Chacun de ces nombres a la propriété de donner un reste 16, étant divisé par 39, et de donner un reste 27, étant divisé par 56.

179 S'il y avoit un plus grand nombre d'équations, le nombre des inconnues surpassant celui des équations, on ramèneroit le problème au précédent, au moyen des méthodes d'élimination. Il suffira d'un seul exemple pour indiquer la manière dont il faudra s'y prendre.

On sait que quarante-une personnes, hommes, femmes et enfans, ont dépensé 741 francs; chacun des hommes a dépensé 24 livres, chacune des femmes 19 livres, et chacun des enfans 10 livres; on demande combien il y avoit d'hommes, de femmes et d'enfans? Nommons x le nombre des hommes, y celui des femmes, et z celui des enfans; on aura les deux équations

$$x + y + z = 41,\ 24x + 19y + 10z = 741.$$

On tire de la première $x = 41 - y - z$, et mettant cette valeur dans la seconde,

$$5y + 14z = 243,\ \text{d'où}\ y = \frac{243 - 14z}{5}.$$

En développant $\frac{14}{5}$ en fraction continue, je trouve $h = 2$, $h1 = 1$, $h2 = 4$; partant $14 = 2.5 + b1$ et $b1 = 4$; $5 = 4 + a1$ et $a1 = 1$; $4 = 4 + b2$ et $b2 = 0$. Donc

$$q = 243 - 4r,\ z = 5r - 243,\ y = 3.243 - 14r,$$
$$x = 9r + 41 - 2.243.$$

Nous remarquerons que $5r - 243 = 5(r - 48) - 3$; soit $r - 48 = m$, les valeurs de z, y, x se présenteront sous cette forme plus simple

$$z = 5m - 3, \quad y = 57 - 14m, \quad x = 9m - 13,$$

et il faudra prendre pour m tous les nombres entiers positifs, qui, étant substitués dans ces expressions, rendront z, y, x des nombres entiers positifs. Il est évident que puisque $14m$ doit être moindre que 57, on aura la plus petite valeur possible de y, en faisant $m = 4$. Cette plus petite valeur est 1; les valeurs correspondantes de z et x sont 17 et 23. En faisant successivement m égal à 3, 2, on trouve pour z, 12, 7, pour y, 15, 29, pour x, 14, 5. Quant à $m = 1$, il n'est pas admissible, puisque 9 étant moindre que 13, il donneroit pour x un nombre négatif. Il n'y a donc que trois solutions possibles, dont voici le tableau, où les valeurs correspondantes sont dans la même colonne verticale :

valeurs de z	17,	12,	7,
de y	1,	15,	29,
de x	23,	14,	5.

Des Problêmes indéterminés du second degré.

180. Toute équation du second degré à deux inconnues, peut-être représentée par

$$ay^2 + byx + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$

on propose de trouver les valeurs rationnelles de y et x qui peuvent satisfaire à cette équation. On la mettra d'abord sous cette forme

$$ay^2 + (bx + d)y = -cx^2 - ex - f;$$

puis, ayant multiplié les deux membres par $4a$, et ajouté à chacun $(bx+d)^2$, on aura

$$4a^2y^2+4a(bx+d)y+(bx+d)^2=$$

$$(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f),$$

dont le premier membre est un quarré parfait. En extrayant la racine quarrée de part et d'autre, on en tire

$$2ay+bx+d=\pm\sqrt{(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f)}.$$

On fera $b^2-4ac=m$, $2bd-4ae=n$, $d^2-4af=p$, et la question sera réduite à trouver les valeurs de x, qui peuvent rendre rationel $\sqrt{mx^2+nx+p}$.

Soit $\sqrt{mx^2+nx+p}=u$, on aura

$$mx^2+nx=u^2-p,$$

$$4m^2x^2+4mnx+n^2=4mu^2-4mp+n^2,$$

d'où l'on tire

$$2mx+n=\pm\sqrt{4mu^2-4mp+n^2};$$

et le problême ne dépendra plus que de rendre rationnelle $\sqrt{hu^2+i}$,

où $h=4m$ et $i=-4mp+n^2$.

181. Si hu^2+i peut être décomposé en facteurs $qu+r$, $su+t$, en sorte que

$$h=qs,\ i=rt,\ qt+rs=0,$$

on fera $(qu+r)(su+t)=(qu+r)^2\xi^2$,

d'où l'on tirera $su+t=(qu+r)\xi^2$,

$$u=\frac{r\xi^2-t}{s-q\xi^2},\ uq+r=\frac{rs-qt}{s-q\xi^2},$$

su

$su + t = z^2 \cdot \frac{rs - qt}{s - qz^2}$, et par conséquent

$$(qu + r)(su + t) = z^2 \left[\frac{rs - qt}{s - qz^2}\right]^2.$$

On a donc $\sqrt{hu^2 + i} = z \cdot \frac{rs - qt}{s - qz^2}$,

quantité rationelle si r, q, s, t sont rationelles. Si, m étant positif, n^2 est plus grand que $4mp$, les deux facteurs de $hu^2 + i$ seront imaginaires. Dans la même hypothèse, les facteurs de $mx^2 + nx + p$ seront réels; et si on les représente par $Qx + R$, $Sx + T$, en prenant $x = \frac{Rz^2 - T}{S - Qz^2}$, on aura

$$\sqrt{mx^2 + nx + p} = z \cdot \frac{RS - QT}{S - Qz^2}.$$

182. Pour éclaircir ce que nous venons de dire par quelques exemples, nous nous proposerons, premièrement, de rendre rationelle la formule $\sqrt{e^2x^2 - 1}$. Les deux facteurs de $e^2x^2 - 1$ sont $ex + 1$, $ex - 1$; donc $Q = S = e$, $R = 1$, $T = -1$, $x = \frac{z^2 + 1}{e(1 - z^2)}$, $\sqrt{ex^2 - 1} = \frac{2z}{1 - z^2}$. Mais pour rendre rationelle $\sqrt{e^2x^2 + 1}$, on la supposera $= u$, d'où $e^2x^2 = u^2 - 1$. On rendra rationelle $\sqrt{u^2 - 1}$ en faisant $u = \frac{z^2 + 1}{1 - z^2}$, et on aura $\sqrt{u^2 - 1} = \frac{2z}{1 - z^2}$; parant $x = \frac{2z}{e(1 - z^2)}$, $\sqrt{e^2x^2 + 1} = \frac{z^2 + 1}{1 - z^2}$.

Les facteurs de $6x^2 + 31x + 35$, sont $3x + 5$, $2x + 7$; donc $Q = 3$, $R = 5$, $S = 2$, $T = 7$. On a par conséquent $x = \frac{5z^2 - 7}{2 - 3z^2}$,

$$\sqrt{6x^2 + 31x + 35} = \frac{11z}{3z - 2}.$$

Si l'on proposoit $9x^2 + 30x + 74$ dont les deux facteurs sont imaginaires, on auroit $m = 9$, $n = 30$, $p = 74$; d'où $h = 36$, $i = -1764 = -(42)^2$. Les deux facteurs de $36u^2 - (42)^2$ seroient $6u - 42$ et $6u + 42$; donc $q = s = 6$, $r = -42$, $t = 42$,

$$u = 7\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}, \sqrt{36u^2 - (42)^2} = \frac{84z}{z^2 - 1}.$$

On auroit donc $18x + 30 = \frac{84z}{z^2 - 1}$,

$$x = \frac{14z}{3(z^2 - 1)} - \frac{5}{3},$$

$$9x^2 + 30x + 74 = 49\left(\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}\right)^2,$$

dont la racine quarrée seroit $7\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$.

183. Il sera facile de rendre rationelles les deux formules $\sqrt{e^2x^2 + nx + p}$ et $\sqrt{mx^2 + nx + e^2}$. Pour la première on fera

$\sqrt{e^2x^2 + nx + p} = ex + z$, d'où $nx + p = 2exz + z^2$, $x = \frac{z^2 - p}{n - 2ez}$. En faisant cette substitution dans le radical, on le change en cette quantité rationelle $\frac{ez^2 - zn + ep}{n - 2ez}$. On supposera $\sqrt{mx^2 + nx + e^2} = e + xz$, et on aura $mx^2 + nx = 2exz + x^2z^2$; divisant par x,

il vient $mx + n = 2ez + xz^2$, d'où $x = \frac{2ez - n}{m - z^2}$. La substitution de cette valeur change le radical en cette quantité rationelle $\frac{ez^2 - nz + em}{m - z^2}$. Relativement à cette dernière transformation, nous remarquerons que, si par quelque tâtonnement on parvenoit à trouver un nombre f qui rendît la formule générale un quarré parfait, en faisant $x = f + Z$, on changeroit $mx^2 + nx + p$ en celle ci $mZ^2 + (2fm + n)Z + mf^2 + nf + p$, dont le dernier terme est un quarré, et qu'on peut rendre toute entière un quarré, par la transformation dont il s'agit.

184. Le cas le plus simple est celui où $m + n + p$ seroit un quarré e^2, où l'on pourroit rendre rationel $\sqrt{mx^2 + nx + p}$ en faisant $x = 1$; alors on supposeroit $x = 1 + Z$, et le radical deviendroit $\sqrt{mZ^2 + (2m + n)Z + e^2}$, qu'on rendroit rationel en le supposant $= e + zZ$. Si $m + p - n$ est un quarré e^2, on fera $x = -1 + Z$, et le radical proposé sera changé en celui-ci $\sqrt{mZ^2 + (n - 2m)Z + e^2}$, que, de même que le précédent, on rendra rationel en le supposant $= e + zZ$. Dans les autres cas, il faut beaucoup d'essais avant de trouver la valeur de f. Si, par exemple, on avoit $\sqrt{5x^2 + 7x - 8}$, on ne trouveroit qu'après avoir essayé quelques nombres, pris tant en plus qu'en moins, que la substitution de 4 au lieu de x rend $5x^2 + 7x - 8 = 100$; on feroit en conséquence $x = 4 + Z$, et l'on auroit à rendre rationel $\sqrt{5Z^2 + 49Z + 100}$. Pour y parvenir, on égaleroit ce radical à $10 + zZ$, et par-là il seroit changé en cette

quantité $\frac{10z^2-47z+10}{5-z^2}$. Lorsqu'on y fait $z=2$, elle devient -4; alors $Z=-7$, $x=-3$; et la substitution de cette valeur de x dans $5x^2+7x-8$ la rend $=16$. Voilà par conséquent deux nombres entiers -3 et 4, qui, substitués à x, rendent $5x^2+7x-8$ un quarré. Comment trouver tous les nombres entiers qui ont cette propriété? Nous nous occuperons bientôt de cette question.

185. Je suppose que mx^2+nx+p, dont les facteurs sont irrationels, et où ni m ni p ne sont des quarrés, peut être partagée en un quarré $(h+ix)^2$, et un trinome qui a pour facteurs $r+qx$, $t+sx$, h, i, q, r, s, t étant des nombres rationels; c'est-à-dire que

$$\sqrt{mx^2+nx+p}=\sqrt{(h+ix)^2+(r+qx)(t+sx)}.$$

On égalera ce radical à $h+ix+(r+qx)z$, d'où l'on tirera $(r+qx)(t+sx)=2(h+ix)(r+qx)z+(r+qx)^2z^2$, et divisant tous les termes par $r+qx$, $t+sx=2(h+ix)z+(r+qx)z^2$. Donc $x=\frac{rz^2+2hz-t}{s-2iz-qz^2}$; en substituant cette valeur, on change le radical en cette quantité rationelle

$$\frac{(hq+ir)z^2+(rs-qt)z+hs-it}{s-2iz-qz^2}.$$

Ainsi le radical $\sqrt{12x^2+50x+44}$ étant décomposé de la manière suivante

$\sqrt{(2x+3)^2+(4x+5)(2x+7)}$, on trouvera $x=\frac{5z^2+6z-7}{2-4z-4z^2}$ et $\frac{z^2-9z-4}{1-2z-2z^2}$ pour la quantité rationelle, qui est la valeur de ce radical. Nous remarquerons que la supposition de $z=-1$ donne $x=-4$,

et que la substitution de cette valeur rend $12x^2+50x+44=36$. Soit $x=-4+Z$, on aura

$$\sqrt{12x^2+50x+44}=\sqrt{12Z^2-46Z+36}.$$

J'égalerai le second radical à $6+Z\zeta'$, et j'obtiendrai cette autre quantité rationnelle $\frac{4\zeta'^2+46\zeta'+72}{12-\zeta'^2}$.

186. Puisque mx^2+nx+p doit être un quarré, on peut supposer $mx^2+nx+p=\zeta^2$; et si f est une des valeurs de x propre à rendre ce multinome un quarré, on aura aussi $mf^2+nf+p=g^2$; ôtant la seconde équation de la première, il vient

$$m(x^2-f^2)+n(x-f)=\zeta^2-g^2, \text{ ou}$$

$$m(x+f)(x-f)+n(x-f)=(\zeta+g)(\zeta-g),$$

ou même encore $\frac{m(x+f)+n}{\zeta+g}=\frac{\zeta-g}{x-f}$.

Soit $\frac{m(x+f)+n}{\zeta+g}=\frac{B}{A}$, on aura aussi $\frac{\zeta-g}{x-f}=\frac{B}{A}$;

partant

$$\zeta+g=\frac{A}{B}[m(x+f)+n],\ \zeta-g=\frac{B}{A}(x-f).$$

Otant l'une de l'autre, on en tire

$$2gAB=(mA^2-B^2)x+(mA^2+B^2)f+nA^2,$$

et par conséquent

$$x=\frac{2gAB-(mA^2+B^2)f-nA^2}{mA^2+B^2},$$

$$\zeta=\frac{g(mA^2+B^2)-AB(2mf+n)}{mA^2-B^2}.$$

Pour avoir les valeurs de x et z en nombres entiers, la supposition la plus simple est de faire $mA^2 - B^2$ égal à $+1$ ou à -1. On supposera 1°. $mA^2 - B^2 = 1$, et on aura

$$x = 2gAB - (mA^2 + B^2)f - nA^2,$$
$$z = g(mA^2 + B^2) - AB(2mf + n);$$

2°. $mA^2 - B^2 = -1$, et on aura

$$x = nA^2 + (mA^2 + B^2)f - 2gAB,$$
$$z = AB(2mf + n) - g(mA^2 + B^2).$$

Le problême est réduit à trouver pour A deux nombres entiers, dont l'un doit rendre $mA^2 - 1$ un quarré, et l'autre $mA^2 + 1$.

187. Nous prendrons pour exemple le trinome $5x^2 + 7x - 8$ du n° 184, qu'il s'agit de rendre un quarré en nombres entiers. On aura $m = 5$, $n = 7$, $p = -8$, et les deux équations

$$5A^2 - 1 = B^2; \quad 5A^2 + 1 = B^2,$$

auxquelles il faut satisfaire en nombres entiers. Pour la seconde, $A = 4$ rend $5A^2 + 1$ un quarré 81; ainsi $B = 9$, $mA^2 + B^2 = 161$, $nA^2 = 112$, $AB = 36$; on a par conséquent

$$x = 112 + 161f - 72g, \quad z = 36(10f + 7) - 161g.$$

On mettra pour f et g leurs valeurs 4 et 10, et on aura $x = 36$, $z = 82$. Ces valeurs de x et z, on les mettra pour f et g dans les mêmes équations, et on aura $x = 4$, $z = 10$; nous ne trouvons donc encore que 4 et 36 à substituer à x pour rendre $5x^2 + 7x - 8$ un quarré.

Mais rien ne détermine le signe de g. On peut le prendre négativement, et avoir

$x = 112 + 161f + 72g, y = 36(10f + 7) + 161g;$

où l'on mettra d'abord pour f et g, 4 et 10, et on aura $x = 1476$, $z = 3302$. Ces valeurs de x et z, on les mettra pour f et g dans les mêmes équations, et on aura $x = 475492$, $z = 1068234$. En continuant de la même manière, on trouvera une infinité de nombres entiers propres à rendre $5x^2 + 7x - 8$ un nombre entier.

On rendra $5A^2 - 1$ un quarré, en prenant $A = 1$, ce qui donne $B = 2$; partant $mA^2 + B^2 = 9$, $nA^2 = 7$, $AB = 2$. En substituant ces valeurs, on trouve

$$x = 4g - 9f - 7, z = 9g - 2(10f + 7),$$

où l'on mettra d'abord pour f et g, 4 et 10, et on aura $x = -3$, $z = -4$. Ces valeurs de x et z, on les mettra pour f et g dans les mêmes équations, et il viendra $x = 4$, $z = 10$. Mais en prenant g avec le signe —, ces équations se changent en celles-ci,

$$x = -4g - 9f - 7, z = -9g - 2(10f + 7),$$

qui donnent, en y substituant pour f et g, -3 et -4, $x = 36$, $z = 82$. On mettra ces valeurs 36, 82 au lieu de f et g dans les mêmes équations, ce qui donnera $x = -659$, $z = -1472$; et on trouvera de cette manière une autre série de nombres entiers qui résolvent le problême proposé.

188. Si nous prenons pour exemple $8x^2 + 1$, nous aurons $m = 8$, $n = 0$, $p = 1$. Nous remarquerons ensuite que $x = 0$ rend toutes les fonctions pareilles au quarré lorsque le second terme est un quarré; nous partirons donc de la supposition de $f = 0$ et $g = 1$, et nous nous contenterons de discuter le cas où A et B sont donnés par $8A^2 + 1 = B^2$. Or, $A = 1$ rend $8A^2 + 1$ un quarré 9; nous ferons donc $A = 1$,

$B = 3$, et, à cause de $mA^2 + B^2 = 17$, $AB = 3$, nos deux équations deviendront

$$x = 17f - 6g, \quad z = 48f - 17g,$$

desquelles nous tirerons, en mettant pour f et g, 0 et 1, $x = -6$, $z = -17$; on mettra ces valeurs -6 et -17 pour f et g dans les mêmes équations, et on aura $x = 0$, $z = 1$. Mais en changeant le signe de g, ces équations deviennent

$$x = 17f + 6g, \quad z = 48f + 17g;$$

d'où l'on tire en faisant $f = 0$, $g = 1$, pour x et z ces valeurs 6 et 17. Faisons ensuite $f = 6$, $g = 17$, et nous aurons $x = 204$, $z = 577$. Pour avoir la solution suivante, nous ferons $f = 204$, $g = 577$, ce qui donnera $x = 6930$, $z = 19601$, etc.

189. Lorsque $n = 0$, on a

$$x = \frac{2gAB - (mA^2 + B^2)f}{mA^2 - B^2},$$

$$z = \frac{(mA^2 + B^2)g - 2ABmf}{mA^2 - B^2}$$

Soit $\frac{2AB}{mA^2 - B^2} = N$, $\frac{MA^2 + B^2}{mA^2 - B^2} = M$,

on aura $M^2 - mN^2 = 1$, ou $mN^2 + 1 = M^2$; ayant satisfait à cette équation en nombres entiers, on mettra les valeurs de M et N dans les formules

$$x = Ng - Mf, \quad x = Mg - MNf,$$

et ensuite dans celles-ci,

$$x = Ng + Mf, \quad x = Mg + mNf,$$

et on aura toutes les solutions de $mx^2 + 1 = z^2$ en nombres entiers.

Si $m = 8$, on prendra $N = 1$, $M = 3$; alors $x = g - 3f$, $z = 3g - 8f$, où si l'on fait $f = 0$, $g = 1$, on aura $x = 1$, $z = 3$; si l'on fait $f = 1$, $g = 3$, on aura $x = 0$, $z = 1$; nous passerons donc aux deux autres équations. Elles deviennent $x = g + 3f$, $z = 3g + 8f$, dans lesquelles nous ferons d'abord $f = 0$, $g = 1$, ce qui donnera $x = 1$, $z = 3$. Soit fait ensuite $f = 1$, $g = 3$, et nous aurons $x = 6$, $z = 17$. En continuant de la même manière, on mettra pour f et g ces valeurs 6 et 17, et on aura $x = 35$, $z = 99$; on mettra 35 et 99 pour f et g, et on aura $x = 204$, $z = 577$; on mettra 204 et 577 pour f et g, et on aura $x = 1189$, $z = 3363$; on mettra ces deux derniers nombres pour f et g, et on aura $x = 6930$, $z = 19601$; et ainsi de suite.

190. Le problème est réduit à trouver une valeur de x, autre que 0, qui rende $mx^2 + 1$ un quarré. Nous nommerons e^2 le plus grand quarré que m renferme, et nous supposerons,

1°. $m = e^2 + 1$: nous ferons $\sqrt{(e^2+1)x^2+1} = ex + p$, d'où $x^2 - 2epx = p^2 - 1$ et

$x = ep + \sqrt{(e^2+1)p^2-1}$. Il est à remarquer que x est plus grand que $2ep$, et qu'en conséquence on peut supposer $x = 2ep + q$,

d'où $ep + q = \sqrt{(e^2+1)p^2-1}$,

$p^2 - 2epq = q^2 + 1$, et $p = eq + \sqrt{(e^2+1)q^2+1}$.

On rendra rationel ce dernier radical, en faisant $q = 0$, ce qui donnera $p = 1$, $x = 2e$, et

$mx^2 + 1 = (e^2 + 1)\,4e^2 + 1 = (2e^2 + 1)^2$.

Donc lorsque $m = e^2 + 1$, $x = 2e$ rend $mx^2 + 1$ un quarré.

2°. $m = e^2 + 2$: nous ferons $\sqrt{(e^2+2)x^2+1} = ex + p$, d'où $2x^2 - 2epx = p^2 - 1$, et

$2x = ep + \sqrt{(e^2+2)p^2 - 2}$. Il est évident que $2x$ est plus grand que $2ep$, que nous pouvons faire $x = ep + q$, laquelle substitution donne

$$ep + 2q = \sqrt{(e^2+2)p^2 - 2}, p^2 - 2eqp = 2q^2 + 1$$

et $p = eq + \sqrt{(e^2+2)q^2 + 1}$. On fera $q = 0$, et on aura $p = 1$, $x = e$, $mx^2 + 1 = (e^2+2)e^2 + 1 = (e^2+1)^2$; donc $x = e$ rend $mx^2 + 1$ un quarré, lorsque $m = e^2 + 2$.

191. Nous supposerons $m = e^2 + n$, et

$$\sqrt{(e^2+n)x^2+1} = ex + p, nx^2 - 2epx = p^2 - 1,$$

d'où nous tirerons $nx - ep = \sqrt{(e^2+n)p^2 - n}$.

Ainsi $nx > 2ep$; nommons 6 le quotient de $\frac{2e}{n}$, j'entendrai par-là le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{2e}{n}$, nous supposerons $x = 6p + q$, et faisant pour abréger $1 + 2.6e - n.6^2 = a$, $n.6 - e = b$, nous aurons $ap^2 - 2bqp = nq^2 + 1$, d'où nous tirerons $ap - bq = \sqrt{(e^2+n)q^2 + a}$. Ainsi $ap > (e+b)q$; soit γ le quotient de $\frac{e+b}{a}$, on supposera $p = \gamma q + r$, et faisant pour abréger $n + e^2 - (a\gamma - b)^2 = ac$, $a\gamma - b = d$, on aura $cq^2 - 2drq = ar^2 - 1$, d'où l'on tirera

$cq - dr = \sqrt{(e^2+n)r^2 - c}$. Ainsi $cq > (e+d)r$;

soit δ le quotient de $\frac{e+d}{c}$, on supposera $q = \delta r + s$,

et faisant pour abréger

$n + e^2 - (c\delta - d)^2 = ch$, $c\delta - d = i$, on aura

$hr^2 - 2irs = cs^2 + 1$, d'où l'on tirera

$hr - is = \sqrt{(e^2+n)s^2 + h}$. Ainsi $hr > (e+i)s$;

soit ι le quotient de $\frac{e+i}{h}$, on supposera $r = \iota s + t$;

et faisant pour abréger

$n + e^2 - (h\iota - i)^2 = h\mathrm{H}$, $h\iota - i = \mathrm{I}$, on aura

$\mathrm{H}s^2 - 2\mathrm{I}ts = ht^2 - 1$, d'où l'on tirera

$\mathrm{H}s - \mathrm{I}t = \sqrt{(e^2+n)t^2 - \mathrm{H}}$. Ainsi $\mathrm{H}s >$

$(e+\mathrm{I})t$; soit λ le quotient de $\frac{e+\mathrm{I}}{\mathrm{H}}$, on supposera

$s = \lambda t + u$; et après avoir fait pour abréger

$n + e^2 - (\mathrm{H}\lambda - \mathrm{I})^2 = \mathrm{HK}$, $\mathrm{H}\lambda - \mathrm{I} = \mathrm{L}$, on

aura $\mathrm{K}t^2 - 2\mathrm{L}ut = \mathrm{H}u^2 + 1$, d'où l'on tirera

$$\mathrm{K}t - \mathrm{L}u = \sqrt{(e^2+n)u^2 + \mathrm{K}}.$$

Ainsi $\mathrm{K}t > (e+\mathrm{L})u$; soit μ le quotient de $\frac{e+\mathrm{L}}{\mathrm{K}}$,

on supposera $t = \mu u + \mathrm{U}$; et après avoir fait pour

abréger $n + e^2 - (\mathrm{K}\mu - \mathrm{L})^2 = \mathrm{KM}$, $\mathrm{K}\mu - \mathrm{L} = \mathrm{N}$,

on aura $\mathrm{M}u^2 - 2\mathrm{NU}u = \mathrm{KU}^2 - 1$, d'où l'on

tirera $\mathrm{M}u - \mathrm{NU} = \sqrt{(e^2+n)\mathrm{U}^2 - \mathrm{M}}$. Ainsi

$Mu > (e+N)U$; soit v le quotient de $\frac{e+N}{M}$; on supposera $u = vU + X$; et après avoir fait pour abréger $u+e^2-(vM-N)^2 = MP$, $vM-N=Q$, on aura $PU^2 - 2QXU = MX^2, +1$, d'où l'on tirera $PU - QX = \sqrt{(e^2+n)X^2+P}$. Ainsi $PU > (e+Q)X$; soit π le quotient de $\frac{e+Q}{P}$, on supposera $U = \pi X + Y$, et après avoir fait pour abréger $n+e^2-(\pi P-Q)^2 = PR$, $\pi P - Q = S$, on aura $RX^2 - 2SYX = PY^2 - 1$, d'où l'on tirera $RX - SY = \sqrt{(e^2+n)Y^2-R}$. Ainsi $RX > (e+S)Y$; soit δ le quotient de $\frac{e+S}{R}$, on supposera $X = \varepsilon Y + Z$, et après avoir fait pour abréger $n+e^2-(\varepsilon R-S)^2 = RT$, $\varepsilon R - S = V$, on aura $TY^2 - 2VZY = RZ^2+1$, d'où l'on tirera $TY - VZ = \sqrt{(e^2+n)Z^2+T}$.

Après un certain nombre d'opérations, si on est arrivé à une équation dans laquelle T soit l'unité positive, le problème est résolu. On y fera $Z = 0$, ce qui donnera $Y = 1$, et de suite $X = \varepsilon$, $U = \pi\varepsilon + 1$, $u = vU + \varepsilon$, $t = \mu u + U$, $s = \lambda t + u$, $r = \iota s + t$, $q = \delta r + s$, $p = \gamma q + r$, $x = 6p + q$. Nous allons éclaircir cette méthode par quelques exemples.

192. Si l'on proposoit $7x^2+1$, on feroit $e^2 = 4$, $e = 2$, $n = 3$, et on auroit $6 = 1$, $a = 2$, $b = 1$,

$\gamma = 1$, $c = 3$, $d = 1$, $\delta = 1$, $h = 1$, $i = 2$; tout se réduiroit à faire $s = 0$ dans l'équation

$r - 2s = \sqrt{7s^2 + 1}$, d'où l'on tireroit $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$, $x = 3$, et par conséquent que la substitution de 3 pour x doit rendre $7x^2 + 1$ un quarré.

Si l'on proposoit $13x^2 + 1$, on feroit $e^2 = 9$, $e = 3$, $n = 4$, et on auroit $6 = 1$, $a = 3$, $b = 1$, $\gamma = 1$, $c = 3$, $d = 2$, $\delta = 1$, $h = 4$, $i = 1$, $\epsilon = 1$, $H = 1$, $I = 3$, $\lambda = 6$, $K = 4$, $L = 3$, $\mu = 1$, $M = 3$, $N = 1$, $\nu = 1$, $P = 3$, $Q = 2$, $\pi = 1$, $R = 4$, $S = 1$, $\varrho = 1$, $T = 1$, $V = 3$. Tout se réduiroit à faire $Z = 0$ dans l'équation $Y - 3Z = \sqrt{13Z^2 + 1}$. On en tireroit $Y = 1$, $X = 1$, $V = 2$, $u = 3$, $t = 5$, $s = 33$, $r = 38$, $q = 71$, $p = 109$, $x = 180$; et en substituant 180 pour x dans $13x^2 + 1$, on le rendroit un quarré.

Nous prendrons pour troisième et dernier exemple $19x^2 + 1$. On fera $e^2 = 16$, $e = 4$, $n = 3$, et on aura $6 = 2$, $a = 5$, $b = 2$, $\gamma = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $\delta = 3$, $h = 5$, $i = 3$, $\epsilon = 1$, $H = 3$, $I = 2$, $\gamma = 2$, $K = 1$, $L = 4$. Le problème sera réduit à faire u nul dans l'équation $t - 4u = \sqrt{19u^2 + 1}$; et on en tirera $t = 1$, $s = 2$, $r = 3$, $q = 11$, $p = 14$, $x = 39$; ainsi 39 est le nombre à substituer à x pour rendre $19x^2 + 1$ un quarré.

193. Ce qui précède bien entendu, on voit que, pour rendre la formule $mx^2 + p$ un quarré en nombre entier, il faut la faire dépendre de formules plus simples, où m et p diminuant continuellement, on arrive enfin à une formule dans laquelle l'un des deux nombres m ou p soit l'unité positive ou un autre nombre quarré positif. On supposera, dans la suite des calculs, que ces nombres sont dégagés des facteurs quarrés qu'ils peuvent contenir, et lorsqu'on aura trouvé

de cette manière une valeur de x, on la multipliera par une fraction, dont le numérateur sera la racine du facteur quarré de p, et le dénominateur la racine du facteur quarré de m, pour avoir la valeur de x, qui convient à la question. Si l'on avoit, par exemple, $8x^2+63$, comme 8 a pour facteur 4, qui est un quarré, et 63 pour facteur 9 qui est aussi un quarré, en faisant abstraction de ces quarrés, on ne s'occuperoit que de la formule $2x^2+7$, qu'on rendroit un quarré, en faisant $x=3$. On multiplieroit ensuite cette valeur de x par la fraction $\frac{3}{2}$, et l'on auroit $x=\frac{9}{2}$, valeur qui, étant substituée dans $8x^2+63$, rendroit cette formule un quarré.

194. Les coefficiens m et p étant dégagés de leurs facteurs quarrés dans la formule mx^2+p, comme x peut être une fraction, nous supposerons $x=\frac{y}{u}$, y et u étant des nombres entiers premiers entr'eux, pour que la fraction soit réduite à ses moindres termes; nous aurons $m\frac{y^2}{u^2}+p$, ou $\frac{my^2+pu^2}{u^2}$, ou my^2+pu^2 qui doit être un quarré; nous aurons donc à résoudre l'équation $my^2+pu^2=z^2$, où y, u, z doivent être premiers entr'eux. Il faut aussi que u et m, y et p soient premiers entr'eux; car, si u et m avoient un commun diviseur d, on pourroit supposer $\frac{u}{d}=a$, $\frac{m}{d}=b$, a et b étant des nombres entiers, et on auroit la formule $bdy^2+pa^2d^2$, où y et ad doivent être premiers entr'eux, où bd ne contient aucun facteur quarré, et qui ne pourroit être un quarré qu'étant divisible par d^2, au lieu qu'elle ne l'est que par d. On démontrera de la même manière que y et p doivent être premiers entr'eux.

195. Cela posé, je suppose $m>p$, et ayant écrit

l'équation de cette autre manière, $my^2 = z^2 - pu^2$, je remarque que nécessairement $z^2 - pu^2$ doit être divisible par m. Or, puisque u et m sont premiers entr'eux, je puis supposer $z = Au - mt$, A et t étant des nombres indéterminés, et $z^2 - pu^2$ deviendra $(Au - mt)^2 - pu^2 = (A^2 - p)u^2 - 2Amtu + m^2t^2$, ou $A^2 - p$ doit être divisible par m; c'est-à-dire qu'il faudra trouver pour A un nombre qui ne soit pas plus grand que $\frac{m}{2}$, lequel nombre rende $A^2 - p$ divisible par m. Si ce nombre n'existoit pas, l'équation $my^2 = z^2 - pu^2$ ne seroit pas résoluble en nombres entiers. Supposons qu'il y ait un tel nombre, et que $A^2 - p$ étant divisé par m, le quotient soit M: on aura $A^2 - p = mM$ et $my^2 (= z^2 - pu^2) = mMu^2 - 2mAtu + m^2t^2$, qui, étant divisé par m, donne $y^2 = Mu^2 - 2Atu + mt^2$, dans laquelle M est moindre que m, puisque $M = \frac{A^2 - p}{m}$ où p est moindre que m et A = ou < que $\frac{m}{2}$.

196. Si M est un nombre quarré, l'équation précédente pourra être résolue par les méthodes que nous avons expliquées dans les numéros précédens, et l'on aura la solution la plus simple en faisant t nul et $u = 1$. Mais si M n'est pas un quarré, on examinera si ce nombre ne seroit pas moindre que p, ou susceptible de le devenir étant divisible par un facteur quarré. En cas que cela fût, on multiplieroit tous les termes de l'équation par M, et on auroit $My^2 = M^2u^2 - 2AMtu + Mmt^2$, où l'on mettroit pour mM sa valeur $A^2 - p$, ce qui la changeroit en celle-ci:

$$My^2 = M^2u^2 - 2AMtu + A^2t^2 - pt^2 = (Mu - At)^2 - pt^2.$$

Il ne s'agiroit plus que de rendre $pt^2 + My^2$, ou $p\frac{t^2}{y^2} + M$, ou, faisant $\frac{t}{y} = x'$, $px'^2 + M$ un quarré.

Par l'hypothèse, M est moindre que p, ou s'il ne l'est pas, c'est qu'il contient un facteur quarré, dont on peut le dégager; ainsi la formule $px'^2 + M$ est plus simple que $mx^2 + p$. On opérera sur cette formule plus simple, comme sur la proposée, en rejetant de M le facteur quarré qu'il peut contenir, bien entendu qu'à la fin du calcul on multipliera par la racine de ce facteur la valeur qu'on aura trouvée pour x'. Ainsi, de même qu'on a réduit $mx^2 + p$ à $px'^2 + M$, on réduira $px'^2 + M$ à $Mx''^2 + M'$, celle-ci à $M'x'''^2 + M''$, etc.; dans ces formules les nombres m, p, M, M', M'', etc., formeront une série décroissante de nombres entiers, qui ne peut point aller à l'infini. On pourra donc toujours terminer l'opération, et on arrivera à une formule $\mu X^2 + \varrho$, où l'un des deux coefficiens μ ou ϱ sera un quarré, si la question admet une solution en nombres rationels; dans le cas contraire, l'opération conduira à une condition impossible.

197. Si M n'étant pas moindre que p, ne peut même le devenir étant divisé par un facteur quarré; dans l'équation $y^2 = Mu^2 - 2Atu + mt^2$, on supposera $u = Bt + s$, et l'on aura

$$y^2 = (MB^2 - 2AB + m)t^2 - 2(A - MB)ts + Ms^2.$$

On fera $A - MB = C$, $m - 2AB + MB^2 = \frac{C^2 - A^2 + Mm}{M} = \frac{C^2 - P}{M} = N$, et l'équation précédente deviendra $y^2 = Nt^2 - 2Cst + Ms^2$.

En

En déterminant le nombre entier B, de manière que C ne soit pas plus grand que $\frac{M}{2}$, abstraction faite des signes, on aura N moindre que M, car $N = \frac{C^2 - p}{M}$, où p est égal ou moindre que M, et C égal ou moindre que $\frac{M}{2}$. On raisonnera sur l'équation que nous venons de trouver, comme nous avons fait dans le numéro précédent, et on dira : si N est un quarré, elle pourra être résolue par les méthodes dont il s'agissoit dans le numéro cité ; si N, n'étant point un quarré, est moindre que p, ou susceptible de le devenir étant divisible par un facteur quarré, on multipliera l'équation par N. Elle deviendra

$$Ny^2 = N^2 t^2 - 2CNst + MNs^2,$$

où l'on mettra pour MN sa valeur $C^2 - p$, et on aura

$$\begin{aligned} Ny^2 &= N^2 t^2 - 2CNst + C^2 s^2 - ps^2 \\ &= (Nt - Cs)^2 - ps^2. \end{aligned}$$

Ainsi $ps^2 + Ny^2$, ou $p\frac{s^2}{y^2} + N$, ou, faisant $\frac{s}{y} = S$, $pS^2 + N$ devra être un quarré, et cette dernière formule, de la forme de la proposée, est plus simple si les conditions sont remplies. Mais il est possible qu'elles ne soient pas remplies, ou que N ne soit pas moindre que p, et ne puisse pas le devenir étant divisé par le facteur quarré qu'il peut contenir. Alors on supposera $t = Es + r$, et l'équation se changera en celle-ci,

$$\begin{aligned} y^2 = &(M - 2CE + NE^2)s^2 - \\ &2(C - NE)rs + Nr^2. \end{aligned}$$

On fera $C - NE = H$, $M - 2CE + NE^2 = \frac{H^2 - C^2 + NM}{N} = \frac{H^2 - p}{N} = P$, et l'équation précédente deviendra $y^2 = Ps^2 - 2Hrs + Nr^2$, dans laquelle si l'on détermine le nombre entier E de manière que H ne soit pas plus grand que $\frac{N}{2}$, abstraction faite des signes, on aura P moindre que N, car $P = \frac{H^2 - p}{N}$, où p est égal ou moindre que N, et H égal ou moindre que $\frac{N}{2}$. On voit que P est moindre que N, N moindre que M, M moindre que m; ainsi m, M, N, P, etc., qu'on trouvera par la suite d'opérations que nous venons d'indiquer, formeront une suite décroissante de nombres entiers. On arrivera donc nécessairement à un nombre moindre que p, et le problème sera résolu.

198. Nous prendrons pour exemple $11x^2 + 22$, que nous nous proposons de rendre un quarré, en mettant pour x un nombre entier. Comme 11 est $<$ que 22, nous ferons $x = \frac{u}{y}$, et nous aurons à résoudre l'équation $11u^2 + 22y^2 = z^2$. Ainsi $m = 22$, $p = 11$, $z = Au - 22t$, où il faut déterminer A de manière que $A^2 - 11$ soit divisible par 22, en prenant pour A un nombre $=$ ou $<$ que 11. $A = 11$ satisfait à la condition; car $1^o 21 - 11 = 110$, qui est divisible par 22 et donne 5 au quotient: donc $M = 5$. Cette valeur de M n'est point un quarré, mais elle est moindre que $p = 11$; on aura donc à résoudre cette autre équation $11t^2 + 5y^2 = z'^2$. Pour y parvenir, on fera $z' = A'y - 11t'$, et il faudra déterminer A' de manière que $A'^2 - 5$ soit divisible par 11, en prenant $A' =$ ou $<$ que $\frac{11}{2}$. Or $A' = 4$ satisfait à la condition; car $16 - 5 = 11$ est divisible par 11, et donne 1 au quotient; donc $M' = 1$; et, comme cette valeur

est un quarré, l'équation que nous trouverons en mettant $A'y - 11t'$ pour z' dans $11t^2 + 5y^2 = z'^2$, sera facile à résoudre. Cette équation est

$$11t^2 = 11y^2 - 88yt' + 121t'^2,$$

dont tous les termes peuvent être divisés par 11. Elle devient par-là $t^2 = y^2 - 8yt' + 11t'^2$, où l'on peut faire $t' = 0$ et $y = 1$. On en tire $t = 1$, $z' = 4$. De plus $(Mu - At)^2 = pt^2 + My^2 = z'^2$; donc

$$5u - 11 = 4,\ 5u = 15 \text{ et } u = 3.$$

Donc $x = \frac{u}{y} = 3$; cette valeur étant substituée pour x dans $11x^2 + 22$, doit rendre cette formule un quarré, ce qu'il est aisé de vérifier.

199. On propose encore de rendre un quarré le trinome $5X^2 + 7X + 15$? On fera (n°. 180) $5X^2 + 7X + 15 = x^2$, et on aura $10X + 7 = \sqrt{20x^2 - 251}$. Il s'agit donc de rendre un quarré $20x^2 - 251$, ou $5x^2 - 251$, divisant le premier terme par 4, qui est un quarré. Comme 5 est moindre que 251, on supposera $x = \frac{u}{y}$, et on aura à résoudre l'équation $5u^2 - 251y^2 = z^2$. On fera $z = Au - 251t$, et il faudra déterminer A de manière que $A^2 - 5$ soit divisible par 251, en prenant pour A un nombre $=$ ou $<$ que $\frac{251}{2}$. Si je prends $A = 16$, j'aurai $A^2 = 256$, $A^2 - 5 = 251$, qui est divisible par 251, et donne $M = -1$. Cette valeur de M n'est point un quarré positif, mais elle est moindre que $p = 5$, on aura donc à résoudre cette autre équation $5t^2 - y^2 = z'^2$. On fera $z' = A'y - 5t'$, et il faudra déterminer A' de manière que $A'^2 + 1$ soit divisible par 5, A' étant $=$ ou $<$ que $\frac{5}{2}$. Si l'on prend $A' = 2$, on aura $A'^2 + 1 = 5$, qui est divisible par 5, ce qui

donne $M' = 1$. Cette valeur est un quarré positif; ainsi l'équation qui proviendra de la substitution de $2y - 5t'$ pour z' dans l'équation $5t^2 - y^2 = z'^2$ devra être facilement résolue. Cette équation est $5t^2 = 5y^2 - 10yt' + 25t'^2$, qui, étant divisée par 5, devient $t^2 = y^2 - 2yt' + 5t'^2$. On fera $t' = 0$ et $y = 1$; on en tirera $t = 1$, $z' = 2$. De plus $u + 16 = 2$, donne $u = -14$; donc $x = -14$; donc 14 est le nombre à substituer à x pour rendre $5x^2 - 251$ un quarré. En le divisant par 2, on aura 7, qui est le nombre à substituer à x pour rendre $20x^2 - 251$ un quarré. Ce quarré 729, a pour racine 27; donc $10X + 7 = 27$, et $X = 2$.

200. Nous proposerons, pour dernier exemple, de rendre un quarré en nombre entier $30 + 62X - 7X^2$. On l'égalera à x^2, et de l'équation

$$7X^2 - 62X = 30 - x^2,$$

on tirera $7X - 31 = \sqrt{1171 - 7x^2}$; tout est donc réduit à rendre $1171 - 7x^2$ un quarré en nombre entier. On fera $x = \frac{u}{y}$, et on aura à résoudre l'équation $1171y^2 = 7u^2 + z^2$. On fera $z = Au - 1171t$, et A devra être déterminé de manière que $A^2 + 7$ soit divisible par 1171. En prenant $A = 321$, on satisfait à cette condition, et on a le quotient $M = 88$. En le dégageant du quarré 4 qu'il contient, je n'abrégerois pas; je le laisserai donc tel qu'il est, et puisqu'il est plus grand que $p = -7$, dans l'équation

$$y^2 = 88u^2 - 2.321tu + 1171t^2,$$

je ferai (n°. 197) $u = Bt + s$; ce qui la changera en celle-ci: $y^2 = Nt^2 - 2Cst + 88s^2$,

où $C = 321 - 88\,B$, $N = \frac{C^2+7}{88}$.

Il faut déterminer B de manière que C ne soit pas plus grand que 44. Si l'on prend $B = 4$, on aura $C = -31$, et $N = 11$ moindre que $M = 88$. Mais N n'est point un quarré, il n'est point moindre que $p = -7$; on reprendra donc l'équation

$$y^2 = 11\,t^2 + 2.31\,s\,t + 88\,s^2,$$

dans laquelle on fera $t = E\,s + r$, et on aura

$y^2 = P\,s^2 - 2\,H\,r\,s + 11\,r^2$, où $H = -31 - 11\,E$, $P = \frac{H^2+7}{11}$. Il faudra déterminer E de manière que H ne soit pas plus grand que $\frac{11}{2}$; si l'on prend $E = -3$, on aura $H = 2$, $P = 1$, et le problème est résolu. En effet, si dans l'équation $y^2 = s^2 - 4\,r\,s + 11\,r^2$, on fait $r = 0$, $s = 1$; on en tirera

$$y = 1,\ t = -3,\ u = -11,\ x = -11;$$

puis $1171 - 7\,x^2 = 324$, dont la racine quarrée est 18. Donc $7\,X - 31 = 18$ et $X = 7$.

201. On propose de rendre rationel des radicaux du second degré, où x seroit élevé à des puissances supérieures; tels sont $\sqrt{x^3+1}$, $\sqrt{3\,x^3+1}$, $\sqrt{3\,x^4+1}$ qu'on rend rationels en faisant $x = 2$. Soit proposé de rendre rationel $\sqrt{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d}$.
Premièrement, si le dernier terme d est un quarré i^2, on supposera

$$a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + i^2 = (i + A\,x)^2,$$

d'où l'on tirera, en déterminant A de manière que $2\,A\,i = c$, et divisant ensuite par x^2,

$$x = \frac{A^2 - b}{a} = \frac{c^2 - 4bi^2}{4ai^2}.$$

Lorsqu'on prend pour exemple $3x^3 - 5x^2 + 4x + 4$, on trouve que cette formule devient un quarré en y mettant 2 pour x. Pour cette autre formule $3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$, la méthode donne $x = \frac{89}{48}$ et $(\frac{217}{64})^2$ pour le quarré qui résulte de la substitution de cette valeur de x.

202. Je ne déterminerai pas A, et de l'équation

$ax^2 + (b - A^2)x = 2Ai - c$, je tirerai

$$2ax + b - A^2 = \pm\sqrt{4a(2aAi - c) + (b - A^2)^2},$$

où il faut prendre pour A des valeurs propres à rendre rationel le radical qui entre dans l'expression de x.

Pour $3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$ l'équation précédente est changée en celle-ci

$$6x = 5 + A^2 \pm \sqrt{12(4A - 3) + (5 + A^2)^2},$$

où la quantité sous le radical devient un quarré par la supposition de $A = \frac{5}{3}$. Ce quarré est $44 + (\frac{70}{9})^2 = (\frac{92}{9})^2$; donc $6x = \frac{70}{9} \pm \frac{92}{9}$, et l'on trouve deux valeurs de x, $x = 3$ et $x = -\frac{11}{3.9}$, qui, l'une et l'autre doivent rendre la formule proposée un quarré.

203. Le dernier terme d n'est point un quarré, mais on est parvenu à trouver une valeur de x, que nous nommerons g, qui rend rationel le radical proposé. On supposera $x = g + y$ et la quantité sous le radical deviendra

$$\begin{array}{rrrr} ay^3 + 3agy^2 + 3ag^2y + ag^3, \\ + \quad b & + 2bg & + bg^2 \\ & + \quad c & + cg \\ & & + \quad d \end{array}$$

dont le dernier terme est nécessairement un quarré, et qu'on pourra traiter par les méthodes précédentes. Un double avantage de cette transformation sera de pouvoir conclure d'une des valeurs de x une série d'autres solutions. En effet, ayant supposé $x = g + y$, lorsque y sera déterminé, on aura une valeur de x que nous nommerons g'; on fera $x = g' + y$; ou, ce qui est la même chose, on mettra g' pour g dans la transformée, et lorsqu'on en aura tiré une nouvelle valeur de y, il sera facile d'en conclure la valeur correspondante de x, que nous nommerons g''; on fera $x = g'' + y$, où l'on mettra g'' pour g dans la transformée; et ayant déterminé une troisième valeur de y, on en tirera la valeur correspondante de x qu'on nommera g'''. En continuant de la même manière, on trouvera, par la combinaison de la première méthode, et de celle du n°. 203, une série g, g', g'', g''', etc. de valeurs de x, dont chacune rendra le multinome proposé un quarré. En traitant ensuite les transformées dont nous venons de parler, par la méthode du n°. 202, on trouvera d'autres valeurs de x, et par leur moyen d'autres séries de solutions; parmi ces solutions, on distinguera principalement celles qui seront en nombres entiers.

204. Pour éclaircir ce que nous venons de dire, nous allons discuter, avec quelques détails, la formule $3x^3 + 1$. Elle ne peut-être traitée immédiatement par la méthode du n°. 201, puisque $b = 0$, $c = 0$. Par celle du n°. 202, on trouve $6x = A^2 \pm \sqrt{24A + A^4}$, dont le second membre devient rationel en prenant $A = 1$, et l'on a $6x = 1 \pm 5$; c'est-à-dire, deux valeurs de x, $x = 1$ et $x = -\frac{1}{3}$. En faisant $x = 1 + y$, on aura la transformée $3y^3 + 9y^2 + 9y + 4$, à laquelle nous appliquerons la méthode du n°. 201; et, à cause de $a = 3$, $b = 9$, $c = 9$, $i = 2$, nous aurons $y = -\frac{21}{16}$ et $x = -\frac{5}{16}$. Nous supposerons

$x = -\frac{2}{3} + y$, et en opérant comme nous venons de faire, nous parviendrons à une autre transformée, de laquelle nous tirerons une autre valeur de y et une autre valeur de x. En continuant d'opérer de la même manière, nous trouverons une suite de solutions, qui eussent été différentes si nous étions partis de $x = -\frac{2}{3}$. Nous en trouverons d'autres encore, en traitant les transformées par la méthode du n°. 202.

Pour la première $3y^3 + 9y^2 + 9y + 4$, on a

$$6y + 9 - A^2 = \pm\sqrt{12(4A - 9) + (9 - A^2)^2},$$

où il faut déterminer A de manière à rendre rationel le second membre de l'équation. Si je fais $A = 3$, le radical devient $= 6$; on a $y = \pm 1$, et deux valeurs de x, $x = 0$, $x = 2$. On rend aussi rationel le même radical, en faisant $A = -7$, et il devient $= 34$. Alors $6y = 40 \pm 34$, d'où l'on tire $y = 1$, comme nous l'avons déja trouvé, et $y = -\frac{37}{3}$, à laquelle valeur correspond $x = \frac{40}{3}$. De toutes ces valeurs nous ne ferons usage que de $x = 2$, et nous supposerons $x = 2 + y$, ce qui donnera pour transformée

$$3y^3 + 18y^2 + 36y + 25.$$

On aura $a = 3$, $b = 18$, $c = 36$, $i = 5$, d'où l'on tirera, par la méthode du n°. 201, $y = -\frac{42}{25}$ et par conséquent $x = \frac{8}{25}$. On fera $x = \frac{8}{25} + y$, etc.

Mais en appliquant à la transformée

$3y^3 + 18y^2 + 36y + 25$ la méthode du n°. 202, on trouve

$$6y + 18 - A^2 = \pm\sqrt{12(10A - 36) + (18 - A^2)^2},$$

où si l'on fait $A = 2$, le radical devient $= 8$. On a donc deux valeurs de y, $y = -1$, d'où l'on tire $x = 1$; et $y = -\frac{11}{3}$, d'où l'on tire $x = -\frac{5}{3}$. On rend encore le second membre rationel en supposant $A = 7$; il devient $= 37$, et l'on a $6y = 31 \pm 37$. L'une des solutions est $y = -1$, d'où l'on tire $x = 1$; l'autre est $y = \frac{34}{3}$, d'où l'on tire $x = \frac{40}{3}$, $3x^3 + 1 = \frac{64009}{y}$, qui a pour racine quarrée $\frac{253}{5}$; ces deux solutions ont déja été trouvées, etc., etc.

205. On a du remarquer que le radical, sous lequel x est élevé à la troisième puissance, ne peut être discuté complettement que conjointement avec celui sous lequel x seroit élevé à la quatrième puissance, et que nous représenterons par

$$\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}.$$

Premièrement, si e est un quarré i^2, on supposera la quantité sous le radical égale à $(i + Ax + Bx^2)^2$, et l'on aura

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = B^2x^4 + 2ABx^3 + (2iB + A^2)x^2 + 2iAx,$$

où l'on déterminera A et B de manière que

$$2iA = d, \quad 2iB + A^2 = c.$$

Alors en divisant toute l'équation par x^3, on en tirera

$$ax + b = B^2x + 2AB \text{ et } x = \frac{2AB - b}{a - B^2}.$$

Si je ne détermine que A, il restera une équation qui, étant divisée par x^2, devient

$$(a - B^2)x^2 + (b - 2AB)x = 2iB + A^2 - c,$$

et donne $2(a-B^2)x+b-2AB=\pm\sqrt{4(a-B^2)(2iB+A^2-c)+(b-2AB)^2}$.

206. Secondement, si a est un quarré h^2, on supposera $h^2x^4+bx^3+cx^2+dx+e=(hx^2+Ex+F)^2=h^2x^4+2hEx^3+(2hF+E^2)x^2+2EFx+F^2$, où l'on fera $2hE=b$, $2hF+E^2=c$, et l'équation deviendra $dx+e=2EFx+F^2$, de laquelle on tirera $x=\frac{e-F^2}{2EF-d}$.

En ne déterminant point F, on a l'équation

$$(c-2hF-E^2)x^2+(d-2EF)x=F^2-e,$$

de laquelle il est facile de tirer

$$2(c-2hF-E^2)x+d-2EF=\pm\sqrt{4(c-2hF-E^2)(F^2-e)+(d-2EF)^2}.$$

207. Troisièmement, si a et e sont l'un et l'autre des quarrés h^2 et i^2, on pourra faire usage de celle qu'on voudra des méthodes précédentes; ou bien supposer la quantité sous le radical égal à $(hx^2+kx+i)^2$. En effaçant les termes qui se détruisent, et divisant par x, on a l'équation

$$(2hk-b)x^2+(2hi+k^2-c)x=d-2ik,$$

de laquelle on tire

$$2(2hk-b)x+2hi+k^2-c=\pm\sqrt{4(2hk-b)(d-2ik)+(2hi+k^2-c)^2}.$$

Si, pour déterminer k on avoit fait $2hk=b$, on

auroit eu $x = \frac{d - 2ik}{2hi + k^2 - c}$; si on avoit fait $2ik = d$, après avoir divisé l'équation par x, on en auroit tiré

$$x = \frac{c - 2hi - k^2}{2hk - b}.$$

208. Quatrièmement, ni l'une ni l'autre des deux quantités, a et e, n'est un quarré; mais on est parvenu à trouver une valeur de x, que nous nommerons g, qui rend rationel $\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$. On supposera $x = g + y$, et la quantité sous le radical deviendra

$$\begin{array}{llllll} ay^4 + & 4ag.y^3 + & 6ag^2.y^2 + & 4ag^3.y + & ag^4 \\ + & b & + 3bg & + 3bg^2 & + bg^3 \\ & & + c & + 2cg & + cg^2 \\ & & & + d & + dg \\ & & & & + e \end{array}$$

dont le dernier terme est un quarré. On pourra donc traiter cette formule par les méthodes précédentes, et à chaque valeur de y qu'on trouvera, on cherchera la valeur de x correspondante. Soit g' une seconde valeur de x, on fera $x = g' + y$, et ayant y, on en tirera une troisième valeur de x, que nous nommerons g''. On fera $x = g'' + y$, et y trouvé, on en tirera une quatrième valeur de x, etc. Ainsi la remarque du n°. 203 a lieu ici dans toute son étendue, ce qui nous reste à éclaircir par quelques exemples.

209. Nous proposerons d'abord $3x^4 + 1$, pour laquelle on a (n°. 205)

$$2(3 - B^2)x = \pm\sqrt{8B(3 - B^2)}.$$

Ainsi au radical où x est élevé à la quatrième puis-

sance, répond un autre radical de même espèce, où B n'est élevé qu'à la troisième puissance, et qu'on rend rationel en nombres entiers, en faisant $B = 1$, $B = -2$, $B = -3$, on en tire ces deux valeurs de x, $x = 1$, $x = 2$, qui, étant substituées dans $3x^4 + 1$, la rendent un quarré. On fera $x = 1 + y$ et on aura la transformée

$$3y^4 + 12y^3 + 18y^2 + 12y + 4,$$

qui peut être résolue par la première méthode du même n°. Elle donne $A = 3$, $B = \frac{9}{4}$, $y = -\frac{8}{11}$, et par conséquent $x = \frac{3}{11}$. Pour avoir une autre solution, on supposera $x = \frac{3}{11} + y$, et de la transformée qui en résultera, on tirera, par la même méthode, une nouvelle valeur de y, partant une nouvelle valeur de x, qui elle-même servira à former une troisième transformée, et ainsi de suite.

Mais celle-ci $3y^4 + 12y^3 + 18y^2 + 12y + 4$

étant traitée par la seconde méthode, on en tire

$$2(3 - B^2)y + 12 - 6B = \pm \sqrt{4(3 - B^2)(4B - 9) + (12 - 6B)^2},$$

dont le second membre devient rationel en nombre entier en faisant $B = 2$, ce qui donne $y = \pm 1$, et ces deux valeurs de x, $x = 0$, $x = 2$, dont la seconde vient d'être trouvée. On fera $x = 2 + y$, et on aura la transformée $3y^4 + 24y^3 + 72y^2 + 96y + 49$ pour laquelle la première méthode donne

$$A = \frac{49}{7}, \quad B = \frac{613}{343}, \text{ et par conséquent}$$

$$y = -\frac{55279}{21597}, \quad x = -\frac{12078}{21597}, \text{ etc.}$$

En développant la quantité sous le dernier radical, on a

$-16B^3+72B^2-96B+36$, que nous chercherons à rendre un quarré par la méthode du n°. 201. Elle donne $B=\frac{c^2-4bi^2}{4ai^2}=\frac{1}{2}$; partant 4 est le quarré demandé, et l'on a $11y=-18\pm 4$, c'est-à-dire, deux valeurs de y, $y=-2$, $y=-\frac{14}{11}$, auxquelles répondent ces deux valeurs de x, $x=-1$, $x=-\frac{3}{11}$. Comme il s'agit de substituer ces valeurs dans $3x^4+1$, où la puissance de x est paire, il est clair que ces deux solutions ne diffèrent pas de celles trouvées plus haut; $x=1$, $x=\frac{3}{11}$. Je passe à un autre exemple.

210. On demande les valeurs de x qu'il faut substituer dans $1+8x^2+x^4$ pour la rendre un quarré. On trouve d'abord (n°. 207)

$$4kx+k^2-6=\pm\sqrt{k^4-28k^2+36},$$

où la quantité sous le radical est aussi du quatrième degré; mais on verra aisément qu'on peut la rendre un quarré en prenant $k=1$, on trouve de cette manière $4x=5\pm 3$, et ces deux solutions $x=2$, $x=\frac{1}{2}$. On fera $x=2+y$ pour avoir la transformée

$$y^4+8y^3+32y^2+64y+49,$$

qu'on résoudra par la seconde méthode du n°. cité. On a $h=1$, $i=7$, $b=8$, $c=32$, $d=64$;

partant $k=\frac{b}{2h}=4$, $y=\frac{d-2ik}{2hi+k^2-c}=-4$;

partant $k=\frac{d}{2i}=\frac{32}{7}$ et $y=\frac{c-2hi-k^2}{2hk-b}=-\frac{72}{28}$.

A ces deux valeurs de y répondent

$x=-2$ ou $x=2$, $x=-\frac{15}{28}$ ou $x=\frac{15}{28}$,

puisqu'il ne s'agit que de puissances paires de x. On fera $x = \frac{15}{28} + y$, pour avoir une autre transformée de laquelle on tirera d'autres valeurs de y, et d'autres valeurs de x correspondantes. Si l'on supposoit $x = \frac{1}{2} + y$, on auroit la transformée

$$y^4 + 2y^3 + \frac{19}{2}y^2 + \frac{17}{2}y + \frac{49}{16},$$

pour laquelle la même méthode donneroit

1°. $k = \frac{b}{2h} = 1$, $y = \frac{d - 2ik}{2hi + k^2 - c} = -1$ et $x = -\frac{1}{2}$;

2°. $k = \frac{d}{2i} = \frac{17}{7}$, $y = \frac{c - 2hi - k^2}{2hk - b} = \frac{1}{28}$,

et $x = \frac{15}{28}$; ces deux solutions n'ajoutent point à ce que nous savions déja. Nous ne croyons pas devoir nous arrêter plus long-temps aux méthodes pour rendre rationels les radicaux du second degré; nous dirons peu de choses des degrés supérieurs.

De la manière de rendre rationelles les quantités irrationelles des degrés supérieurs.

211. Nous proposerons de rendre rationel $\sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}$. Premièrement si d est un cube i^3, on fera $ax^3 + bx^2 + cx + i^3 = (Ax + i)^3 = A^3x^3 + 3iA^2x^2 + 3i^2Ax + i^3$. On déterminera A de manière que $3i^2A = c$; divisant ensuite tous les termes de l'équation par x^2, elle deviendra

$$ax + b = A^3x + 3iA^2,$$

d'où l'on tire $x = \frac{3iA^2 - b}{a - A^3}$.

En ne déterminant pas A, et divisant par x, la même équation devient

$$(a - A^3)x^2 + (b - 3iA^2)x = 3i^2A - c,$$

de laquelle on tire

$$2(a - A^3)x + (b - 3iA^2) = \pm \sqrt{4(a - A^3)(3i^2A - c) + (b - 3iA^2)^2}.$$

212. Si a est un cube h^3, on fera

$$h^3x^3 + bx^2 + cx + d = (hx + B)^3 = h^3x^3 + 3h^2Bx^2 + 3hB^2x + B^3.$$

On déterminera B de manière que $3h^2B = b$, et l'équation deviendra $cx + d = 3hB^2x + B^3$, de laquelle on tire $x = \frac{3hB^2 - c}{d - B^3}$.

En ne déterminant pas B, la même équation devient

$$(b - 3h^2B)x^2 + (c - 3hB^2)x = B^3 - d,$$

de laquelle on tire $2(b - 3h^2B)x + c - 3hB^2 = \pm \sqrt{4(b - 3h^2B)(B^3 - d) + (c - 3hB^2)^2}$.

213. Si a et d sont des cubes h^3 et i^3, outre que l'on peut traiter le radical par les méthodes précédentes, on peut faire aussi

$$h^3x^3 + bx^2 + cx + i^3 = (hx + i)^3 = h^3x^3 + 3ih^2x^2 + 3i^2hx + i^3.$$

Cette équation devient, après l'avoir divisée par x,

$bx + c = 3ih^2x + 3hi^2$, d'où l'on tire

$$x = \frac{3hi^2 - c}{b - 3ih^2}.$$

214. Enfin ni a ni d ne sont des quarrés, mais on a une valeur de x, que nous nommerons g, qui, étant substituée dans le radical proposé, le rend rationel; on demande de trouver d'autres valeurs de x propres au même objet. On fera $x = g + y$, et on aura la transformée suivante, dont le dernier terme est nécessairement un cube :

$$\begin{array}{rrrrrrr} ay^3 & + & 3ag.y^2 & + & 3ag^2.y & + & ag^3. \\ & + & b & + & 2bg & + & bg^2 \\ & & & + & c & + & cg \\ & & & & & + & d \end{array}$$

215. La formule $4x^3 - 6x^2 - 18x + 8$, où le dernier terme est un cube, appartient à la méthode du n°. 211. On aura $A = \frac{c}{3i^2} = -\frac{1}{2}$, et parconséquent $x = \frac{3iA^2 - b}{a - A^3} = \frac{156}{19}$. On fera $x = \frac{156}{19} + y$, et on obtiendra une transformée, de laquelle on tirera une autre valeur de x; celle-ci servira à en trouver une troisième, et ainsi de suite. On aura aussi

$$2(4 - A^3)x = 6(1 + A^2) \pm \sqrt{12(4 - A^3)(4A + 6) + 36(1 + A^2)^2},$$

dont on rend le second membre rationel en faisant A nul. On trouve, pour la quantité sous le radical, 324 qui a pour racine quarrée 18. Donc $8x = 6 \pm 18$, d'où l'on tire ces deux valeurs de x, $x = 3$, $x = -\frac{3}{2}$. On fera $x = 3 + y$, et on aura la transformée

$4y^3$

$4y^3 + 30y^2 + 54y + 8$, pour laquelle

$A = \frac{c}{3h^2} = \frac{9}{2}$, $y = -\frac{732}{697}$; partant $x = \frac{1359}{697}$.

Nous ne chercherons pas d'autres termes de la série de solutions qui résulte de $x = 3$, non plus que la série qui résulteroit de $x = -\frac{3}{2}$. Nous remarquerons seulement que, par rapport à la dernière transformée, on a

$$2(4 - A^3 y) + 6(5 - A^2) = \pm \sqrt{4(4 - A^3)(12A - 54) + 36(5 - A^2)^2},$$

dont le radical est rendu rationel par la supposition de $A = 0$. On trouve $8y = -30 \pm 6$. A ces deux valeurs de y répondent deux valeurs de x, $x = 0$, et $x = -\frac{3}{2}$, solution que nous avons déja rencontrée.

216. Si nous prenons pour exemple $x^2 + 1$, nous aurons (n°. 212)

$$-6Bx - 3B^2 = \pm \sqrt{-12B(B^3 - 1) + 9B^4},$$

dont le second membre devient rationel par la supposition de $B = 1$; on trouve $-2x - 1 = \pm 1$; et ces deux valeurs de x, $x = 0$, $x = -1$. On fera $x = -1 + y$ pour avoir la transformée $y^3 - 3y^2 + 3y$, qu'on traitera par la méthode du même article, on trouvera $B = -\frac{b}{3h^2} = -1$, $y = \frac{3hB^2 - c}{d - B^3} = 0$, partant $x = -1$, comme nous l'avons trouvé. On a ensuite $-6(1 + B)y + 3(1 - B^2) = \pm$

$$\sqrt{-12(1 + B)B^3 + 9(1 - B^2)^2},$$

dont on rend le second membre rationel en faisant $B = 0$,

et il vient $-2y+1=\pm 1$, ou $y=1$ et $y=0$. On ne trouve donc encore que ces deux valeurs de x, $x=0$ et $x=-1$; pour en rencontrer d'autres, il faudra chercher quelqu'autre moyen de rendre rationels les radicaux précédens. Celui de la seconde équation n'est autre que $\sqrt{-3B^4-12B^3-18B^2+9}$, que nous rendrons rationel par la méthode du n°. 205, où nous nommerons A', B' ce que nous y avons désigné par A, B. Nous trouverons $A'=0$, $B'=\frac{c}{2i}=-3$, et par conséquent $B=\frac{-b}{a-B'^2}=-1$, valeur de laquelle on ne peut rien tirer. Nous examinerons ensuite l'équation $-(3+B'^2)x-6=\pm$

$$\sqrt{-6(3+B'^2)(B'+3)+36},$$

où nous ferons $B'=-3+Y'$; ce qui change la quantité sous le radical en celle-ci

$$-6Y'^3+36Y'^2-72Y'+36,$$

que nous rendrons un quarré par la méthode du n°. 201. Nous trouverons, en nommant A'' ce que nous y avons désigné par A, $A''=-6$, $Y=0$; partant $B'=-3$, et rien de plus que ce que nous avons déja trouvé. Mais (n°. 202) $-12Y+36-A''^2=\pm$

$$\sqrt{-288(A''+6)+(36-A''^2)^2},$$

dont la quantité, sous le radical, est susceptible de la méthode du n°. 206. Elle donne $E=0$, $F=-36$, et par conséquent $A''=-\frac{e-F^2}{d}=-6$, résultat que nous avons déja rejeté. Quelque loin que nous poussions cet examen, nous ne trouverons pas d'autres

nombres que o et — 1, à substituer pour x, qui puissent rendre $x^3 + 1$ un cube : et, parce que le problême de trouver deux cubes dont la somme soit un cube, dépend évidemment du précédent, nous conclurons que ce dernier problême est impossible.

217. Il n'en est pas ainsi du problême de trouver trois cubes dont la somme soit un cube. Si $p^3 + q^3 + r^3$ doit être un cube, il en sera de même de $P^3 + Q^3 + 1$, où $P = \frac{p}{r}$, $Q = \frac{q}{r}$. Pour ramener cette formule aux précédentes, on fera $P = x + m$, $Q = x - m$, et on aura $2x^3 + 6m^2x + 1$, que nous traiterons par la méthode du n°. 211. On trouve $A = 2m^2$ et $x = \frac{6m^4}{1 - 4m^6}$; si l'on fait $m = 1$, on a $x = -2$, et pour les racines des trois cubes demandés, — 1, — 3, + 1 ; si l'on fait $m = 2$, on a $x = -\frac{32}{85}$, et pour les racines des trois cubes — 202, 85 et 138 ; la somme des trois cubes est égale à — 5000211, dont la racine est — 171, etc. Dans l'hypothèse de $m = 1$, si l'on fait $x = -2 + y$, on aura la transformée $2y^3 - 12y^2 + 30y - 27$ susceptible d'être rendue un cube par la méthode du numéro cité. On trouve $A = \frac{10}{9}$, $y = \frac{324}{229}$, $x = -\frac{134}{229}$; partant les racines des trois cubes seront — 363, 95 et 229 ; en ajoutant les trois cubes, on trouve 34965783, dont la racine cube est 327, etc. Si les racines des trois cubes doivent former une progression arithmétique, dont la différence soit 1, en nommant x le terme moyen de cette progression, $x - 1$ et $x + 1$ les deux autres termes, on aura, pour la somme des trois cubes, $3x^3 + 6x$. Une solution qui se présente d'abord, est de faire $x = 4$; par cette substitution la formule devient 216, cube de 6, et somme de trois cubes qui

ont pour racines 3, 4 et 5. Soit $x = 4 + y$, on aura la transformée $3y^3 + 36y^2 + 150y + 216$, à laquelle nous appliquerons la méthode du n°. 211, et nous aurons $A = \frac{24}{18}$, $y = -\frac{74}{1871}$, $x = \frac{32}{1871}$. Ainsi -1839, 32, 1903 sont les racines de trois cubes, dont la somme est 672221376, nombre cube lui-même, qui a pour racine 876, etc., etc.

218. Si nous voulions appliquer les mêmes méthodes au radical du quatrième degré

$$\sqrt[4]{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

; on distingueroit les trois cas suivans; 1°. lorque e est une quatrième puissance i^4, on supposeroit la quantité, sous le radical, égale à $ax + i$; et ayant déterminé A de manière que $4i^3 A = d$ et divisé tous les termes de l'équation par x^2, on auroit

$$(a - A^4)\, x^2 + (b - 4iA^3)\, x = (6i^2 A^2 - c),$$

de laquelle on tireroit

$$2(a - A^4)\, x + b - 4iA^3 = \pm \sqrt{4(a - A^4)(6i^2 A^2 - c) + (b - 4iA^3)^2}.$$

2°. Lorsque a est une quatrième puissance h^4, on supposeroit la quantité, sous le radical, égale à $hx + B$; et ayant déterminé B de manière que $4h^3 B = b$, on auroit l'équation

$$(c - 6h^2 B^2)\, x^2 + (d - 4hB^3)\, x = B^4 - e,$$

de laquelle on tireroit

$$2(c - 6h^2 B^2)\, x + d - 4hB^3 = \pm \sqrt{4(c - 6h^2 B^2)(B^4 - e) + (d - 4hB^3)^2}.$$

3°. Lorsque a et e sont des quatrièmes puissances h^4 et i^4, ayant fait la quantité sous le radical égale à $hx+i$ et divisé tous les termes dé l'équation par x, on auroit

$$(b-4ih^3)x^2+c-6i^2h^2=4i^3h-d,$$

de laquelle on tireroit

$$2(b-4ih^3)x+c-6i^2h^2=\pm\sqrt{4(b-4ih^3)(4i^3h-d)+(c-6i^2h^2)^2}.$$

Dans chacun des résultats que nous venons de trouver, la valeur de x renferme un radical du second degré, qui ne peut devenir rationel que dans des cas particuliers, auxquels nous ne croyons pas devoir nous arrêter.

FIN.

608139 Biblioteca Nazionale V. Emanuele III Napoli

ADDITION.

PAGE 30, ligne 15, *lisez :*

On le démontrera différemment en tirant de $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ les équations suivantes :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{n}}, \ldots\ldots \frac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}} = \frac{\sqrt[r]{m}}{\sqrt[r]{n}},$$

lesquelles mises en proportion donnnent

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} :: \sqrt{m} : \sqrt{n}, \sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} ::$$

$$\sqrt[3]{m} : \sqrt[3]{n}, \ldots\ldots \sqrt[r]{a} : \sqrt[r]{b} :: \sqrt[r]{m} : \sqrt[r]{n}.$$

DE L'IMPRIMERIE DE BELIN,
rue Saint-Jacques, n°. 22.

NOTICE

Des principaux Livres d'Assortiment qui se trouvent chez le même Libraire pour les Mathématiques, Sciences et Arts, quai des Augustins, n°. 37.

JOURNAL *de l'Ecole Polytechnique*, ou *de l'Ecole Centrale du Génie, de l'Artillerie et des Ponts et Chaussées*, rédigé par les Citoyens Lagrange, Prony, Fourrier, Fourcroy, Hassenfratz, Neveu, Baltard, Lamblardie, Monge, Chaptal, Guyton, Bertholet, Chaussier, Barruel, Vauquelin.

Le succès de cette Collection in-4. est connue. Le prix des 1er, 2e, 3e et 4e cahiers est de 3 liv. 10 s. pour Paris. Le 5e cahier est la Théorie des Fonctions Analytiques, par Lagrange, 5 l. 10 s. pour Paris. Le 6e cahier est sous presse, et paroîtra en Frimaire. On ne souscrit pas à ce Journal; on l'achète par Cahier. On est prié d'affranchir les Lettres.

La Collection des Mémoires de l'Académie de Berlin, — des Mémoires de l'Académie des Sciences, — de l'Académie des Inscriptions, — l'Encyclopédie in-fol., in-4., in 8., — et autres Dictionnaires Historiques, Géographiques, d'Histoire Naturelle, d'Agriculture, des Origines, des Arts, etc.

MATHÉMATIQUES.

Collection des Œuvres d'Euler et de d'Alembert.

On vend aussi collectivement et séparément les Ouvrages de ces deux Mathématiciens et des suivans :

Euclide, Newton, Descartes, Leibnitz, les Bernoully, l'Hôpital, Simson, Simpson, Saunderson, Emerson, Wolff, Cagnoli, Deschales, Stitling, Apollonius, Bachet, Deydier, Cramer, Tacquet, Audierne, Lagrive, Digard, Clairaut, Duchâtelet, Deparcieux, Reyneau, Wallis, Pézenas, Fermat, Maclaurin, Castel, Lachapelle, Trincano,

Doyen, Frenicle, Para, Bélidor, Guyot, Ozanam, Condorcet, Viviani, Guisnée, Laplace, Rivard, Mazéas, Camus, Bezout, Bossut, Mauduit, Lemoine, Lacroix, Parent, Bertrand, Lagny, Montucla, Marie Legendre, Barrême, Lansbergue, Ward, le Seur et Jacquier, Valmesley, Scholtus, Raphson, Tartaglia, Pitiscus, Varignon, Mourraille, Fontaine, Bougainville, Agnési, Koudou, Lahire, Gagnat Delaulnais, Lingois, Saury, Marie, Lacaille, Robbins, Gardiner, Callet, Moivre, Taylor, d'Ulac.

Théorie des Fonctions analytiques, par Lagrange. in-4. 5 liv.
Méthode Analytique, par le même, in-4.
Le Calcul Décimal, appliqué au Commerce, in-8.
Et autres bons Livres de ce genre.

DESSIN, ART MILITAIRE, ARCHITECTURE CIVILE, MILITAIRE, HYDRAULIQUE.

Vitruvii Architectura, *Elzevir*, in-fol. maroq. f. dor.
Archimède; Perronet, Daviler, Bélidor, Vignole, Dupuis, Potain, Desgodets, Nativelle, Palladio, Marot, Blondel, Boffrand, Briseux, Bosse, Ducerceau, Larue, Frézier, Prony, Inigo-Jones, Panseron, Lagardette, Reigemortes, Chambray, Dupin.
Traité du Nivellement; Picard, Lespinasse.
Perspective de Pozzo; Dubreuil, Jeaurat, Bosse, Desargues, Paylor, Brétés, Courtonne.
Principes de Dessin.
Théorie de la Figure humaine.
Canaux navigables; Vauban, Lalande, Defer; Linguet, Deparcieux, Frizi.
Ruines de la Grèce; Palmyre, Pœstum, Balbec.
Antiquités Ioniennes.
Scriptores Veteres de re Militari, in-4. mar. f. dor.
Œuvres de Polybe, Végece, Folard, Vauban, Leblond, Turpin, Montécuculli, de Saxe, Guibert, Montalembert, Loydd, Robins, Puységur, Lefevre, Antoni, Maizeroy, Bel-Air.
Ordonnances de l'Infanterie, Cavalerie et Marine.
Campagnes de Turenne, Condé, Luxembourg, Maillebois, Frédéric II.
— *de Buonaparte, en Italie; par un Officier général*, 1 vol. avec la carte. 5 liv. 10 s., in-8, 3 liv. 12 s. sans la carte.

Vocabulaire de la Marine ; l'Escalier, Aubin, Bouguer, Dulague, Morogues, Bourdet, Hoste, Dugai-Trouin, Forfait.
Architecture Hydraulique de Kroenke et Wiebeling, proposée par souscription, 6 vol. in-4.
Méchanique appliquée aux Arts, par Berthelot.
Gnomonique de Rivard, Fedos, Garnier
La Galerie du Palais-Royal de Dusseldorff, les Antiquités d'Herculanum, et Etrusques ; Bion, Vinckelman, Caylus, et tous les Livres relatifs aux Arts.
Description des Ports de Brest, des Fêtes, des Ponts, des Salles de Spectacles, des Maisons ci-devant Royales.

PHYSIQUE, CHIMIE, HISTOIRE NATURELLE.

Mussembrock, Pluche, Maupertuis, Nollet, Desaguliers, Jars, Brisson, Priestley, Paulian, Sigaud-de-Lafond, Sgravesande, Mariotte, Pingré, Marivetz, Lalande, Laplace, Réaumur, Bailly, Galilée, Hallée, Bouguer, Hellot, Schreiber, la Condamine, etc., etc.
Pesanteur spécifique des Corps, par Brisson, 1 vol. in-4.
Météorologie, ou Table des Poids et Mesures, in-8. Pouchet.
Macquer, Fourcroy, Chaptal, Lavoisier, Romé Delisle, Annales de Chimie, Journal de Physique.
Pline, Aristote, Buffon, Bomare, Elémens de Botanique, de Lyon, Linné, Tournefort, Jussieu, Lamarck.
Flora Parisiensis, et Bauhin.
Elémens de Botanique, par Ventenat, etc., etc.

SCIENCE ÉCONOMIQUE ET MORALE.

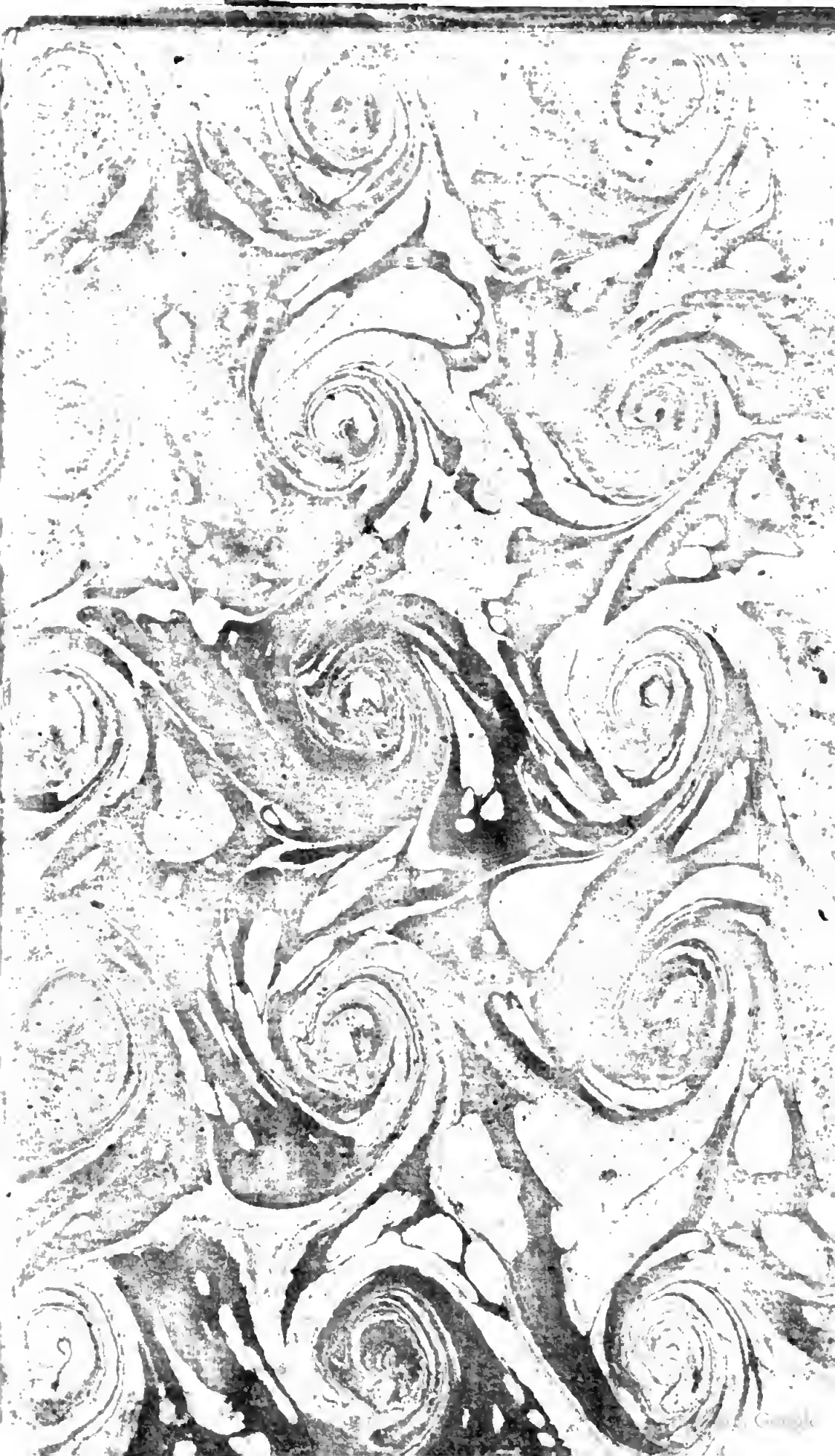
Agriculture. Maison Rustique, Dictionnaire du Jardinier, par Miller ; Cours d'Agriculture, par Rozier ; Œuvres complètes de Duhamel ; Dictionnaire Economique, de Chomel ; Elémens d'Agriculture, in-8 et in-12, etc.

Commerce. Banque rendue facile, par Giraudeau ; Parfait Négociant, de Savary ; Dictionnaire du Commerce ; Science des Négocians, par Laporte ; des Lettres de Change ; Art de tenir les Livres ; Traité des Arbitrages par Ruelle ; Comptes-faits ; Bibliothèque des Jeunes Négocians ; Dictionnaire de l'Industrie ; Almanach des Négocians et Marchands ; Tableau du Commerce.

Morale. Fénélon, Confucius, Morale universelle; Science de la Législation, par Filangieri; Science du Gouvernement, par Réal. - Grotius, Puffendorff, Vattel, Burlamaqui, Spinosa, Montaigne, Charron, Pope, Bayle, Mably, Condillac, Herrenschwand, Voltaire, Rousseau, Helvétius.

Montesquieu, 5 vol. in-4., pap. vélin, 15 figures et cartes par les plus célèbres Artistes, avec de nouveaux Manuscrits, 240 liv., avec la lettre.

Il y a un *Supplément in*-8. et *in*-12, en un volume, qui complète les autres éditions de Montesquieu, et qui leur donne les nouveaux Manuscrits.

On trouve aussi, chez le même Libraire, les grands Voyages, avec Figures et Atlas; le *Voyage d'Antenor en Grèce et en Asie*, par Lantier, en 3 volumes in-8., avec Figures, production dans le genre d'Anacharsis; et en général, les Livres d'Histoire et de Littérature, les éditions Grecques et Latines, et les bons Auteurs de toutes les Langues anciennes et modernes, sur papier vélin.

Il se charge des commissions de Livres, des ventes de Bibliothèques et des Abonnemens aux Journaux.